複素関数・同演習 第11回

〜 冪級数 (4) 〜

桂田 祐史（かつらだ まさし）

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/

2021年10月26日

目次

本日の内容・連絡事項

- 本日のパスワード:
- 冪級数の 4 回目。冪級数が収束円より小さい閉円盤では一様収束するという定理を述べた後、冪級数の項別微分可能性に関わる事項 (Abel の定理など) を説明します (講義ノート [1] の§3.2, §3.3)。証明の比重が大きめだけど、例も重要。
- 第 9 回の授業で、「Cauchy-Hadamard の公式は使わない、証明もしない」と言いましたが、やはり定理の証明などには便利なので使わせてもらいます。第 9 回のスライド PDF pp. 22–23 (証明部分) を解説した動画を第 9 回の授業内容・資料のところに置いておきます。証明が気になる人は視聴して下さい。
- 宿題 5 の解説をします。
- 宿題 6 を出します (〆切は休み明けの 11 月 9 日 13:30)。
- 「複素関数」の出欠について:
  1. (i) 対面授業に出席して Oh-o! Meiji で出席を登録
  2. (ii) 授業実施時に Zoom ミーティングに参加 (滞在時間が自動的に記録される)
  3. (iii) Oh-o! Meiji で動画を視聴 (〆切は翌週末まで)
  4. (iv) トラブル時に学年・組・番号・氏名を書く (これは今後ないはず)

  どの方法でも「出席」となりますが、Oh-o! Meiji に反映されるのは (i) だけです。(編集する機能は用意されていないので、他の方法で出席したものは反映できない。)
  10 月 12 日は、私のミスで出欠記録が不完全なので、「全員出席」とします。
  出席点はないので「原則 2/3 以上」ルールを満たす場合は神経質になる必要はない。

3.2.4 冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する

定理 11.1 (冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する)

$c \in \mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は複素数列, $0 \leq \rho \leq +\infty$ とする。冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径が ρ ならば、この冪級数は、$0 < R < \rho$ を満たす任意の R に対して、$\overline{D}(c;R)$ で一様絶対収束する。

念のため記号の復習

$$D(c;R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < R\}, \quad \overline{D}(c;R) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| \leq R\}.$$

注意 11.2 (広義一様収束)

「トポロジー」などで、コンパクト集合の概念を知っている人に。上の定理から「収束円 $D(c;\rho)$ 内の任意のコンパクト集合上で一様収束する」ことが導かれる。このことを「$D(c;\rho)$ で**広義一様収束**する (uniformly convergent on every compact set in $D(c;\rho)$)」という。この概念はとても重要であるが、この授業では上の定理の形で満足しておく。 □

3.2.4 冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する

証明　$0 < R < r < \rho$ を満たす r を取る。$z = c + r$ で収束するから、

$$\lim_{n\to\infty} a_n r^n = \lim_{n\to\infty} a_n (z-c)^n = 0.$$

ゆえに $\{a_n r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である。すなわち、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}) \quad |a_n r^n| \le M.$$

$b_n := M\left(\frac{R}{r}\right)^n$ とおくと、$|z-c| \le R$ をみたす任意の z に対して

$$|a_n(z-c)^n| \le |a_n| R^n = |a_n r^n| \left(\frac{R}{r}\right)^n \le M\left(\frac{R}{r}\right)^n = b_n.$$

そして

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \frac{M}{1-R/r} \quad (\text{収束}).$$

Weierstrass の M-test (定理 10.5) によって、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は、

$\overline{D}(c;R)$ で一様に絶対収束する。 □

次の定理は特に重要である。

定理 11.3 (冪級数の項別微分定理, Abel)

冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径を ρ とするとき、f は $D(c;\rho)$ で正則で

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-c)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(z-c)^n \quad (z\in D(c;\rho)).$$

右辺の冪級数の収束半径は ρ である。

微分した結果が、やはり冪級数で、その収束半径が元と一致していることに注目しよう。そのことから何回でも微分できることが導かれることを理解しよう。

3.3.1 冪級数の項別微分定理 (補足) 定理の証明

証明　$c=0$ として証明すれば良い。$g(z) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ とおく。

第 1 段 $g(z)$ の収束半径が $f(z)$ の収束半径 ρ に等しいこと

まず $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ を注意しておく。(実際 $b_n := \sqrt[n]{n}$ とおくと、$n\to\infty$ のとき $\log b_n = \log\left(n^{1/n}\right) = \frac{\log n}{n} \to 0$ であるから、$b_n = e^{\log b_n} \to e^0 = 1$.)

冪級数 $g(z)$ の収束半径は、冪級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n}$ $(= zg(z))$ の収束半径と同じであるので

$$g(z) \text{ の収束半径} = \frac{1}{\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n a_n|}} = \frac{1}{\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \rho.$$

実際、1 番目と 3 番目の等号は Cauchy-Hadamard の公式による。2 番目の等号 $=$ は次の (a), (b) による。

- (a) 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $\sqrt[n]{n}\geq 1$ であるから、$\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n a_n|} \geq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.
- (b) 任意の $\varepsilon>0$ に対して、ある自然数 N が存在して、任意の自然数 $n\geq N$ に対して $\sqrt[n]{n}\leq 1+\varepsilon$ となる。ゆえに $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt{n\,|a_n|} \leq (1+\varepsilon)\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. ε は任意だから $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt{n\,|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

□

3.3.1 冪級数の項別微分定理 (補足) 定理の証明

第 2 段 $f' = g$ であること $0 < R < \rho$ を満たす任意の R に対して、f は $D(0;R)$ で正則で、$f' = g$ であることを示せば良い。

ε を任意の正数とする。($\sum_n n a_n z^{n-1}$ が $z = R$ で絶対収束ゆえ) ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$(\star) \qquad \sum_{n=N+1}^{\infty} n\,|a_n|\,R^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$z \in D(0;R)$, $h \neq 0$, $z + h \in D(0;R)$ とすると

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - g(z)\right| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\left((z+h)^n - z^n\right)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}\right| \\
&\le \left|\sum_{n=1}^{N} a_n \left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1}\right)\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h}\right| \\
&\quad + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} n a_n z^{n-1}\right|.
\end{aligned}$$

右辺第 1 項は、$(z^n)' = n z^{n-1}$ より、$|h|$ が十分小さければ $\dfrac{\varepsilon}{3}$ より小さい。

3.3.1 冪級数の項別微分定理 (補足) 定理の証明

右辺第 2 項については

$$\begin{aligned}
|(z+h)^n - z^n| &= \left|((z+h)-z)\left((z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \cdots + z^{n-1}\right)\right| \\
&\le |h|\left(|z+h|^{n-1} + |z+h|^{n-2}|z| + \cdots + |z|^{n-1}\right) \\
&\le |h|\left(nR^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

であるから

$$\text{右辺第 2 項} \le \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \frac{|(z+h)^n - z^n|}{|h|} \le \sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n| R^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

右辺第 3 項については (三角不等式, $|z| < R$, $(\star)$ により)

$$\text{右辺第 3 項} \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|na_n z^{n-1}\right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n| R^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

以上より、$|h|$ が十分小さければ $\left|\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h} - g(z)\right| < \varepsilon$. ゆえに $f'(z) = g(z)$. □

系 11.4 (収束冪級数は Taylor 展開である)

収束冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の定める関数 f は、収束円 $D(c;\rho)$ で無限回微分可能で

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad \text{ゆえに} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n.$$

特に関数が c 中心の収束冪級数で表されるならば、表し方はただ一通りしかなく、それはその関数の c における Taylor 展開に一致する。

証明　任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、f を k 回項別微分して

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_k(z-c)^{n-k}.$$

$z = c$ を代入すると、$n = k$ の項のみ残って

$$f^{(k)}(c) = k(k-1)\cdots 2\cdot 1\cdot a_k = k!a_k.$$

ゆえに $a_k = f^{(k)}(c)/k!$. □

系 11.5 (収束冪級数は原始関数を持つ)

収束冪級数 $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ (収束半径を ρ とする) に対して、

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-c)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n}(z-c)^n \quad (z \in D(c;\rho))$$

とおくと、収束半径は同じで、$F' = f$ が成り立つ。

証明　$F(z)$ を定義する冪級数を項別微分した冪級数は、$f(z)$ を定義する冪級に等しい。

$F(z)$ を定義する冪級数の収束半径は $\dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{|a_n|}{n+1}}}$ である。これは $f(z)$ の冪級数の収束半径 $\dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ に等しい ($\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$ であるから)。 □

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開

上の定理から、どういうやり方でも、$f(z)$ を収束冪級数の形に表せれば、それは f の Taylor 展開である。

以下、等比級数の和の公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad (\text{収束する} \Leftrightarrow |r| < 1)$$

を利用した **Taylor 展開の導出法**を説明する。収束半径は ρ と表す。

例 11.6 (基本)

等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

収束する $\Leftrightarrow |z| < 1$. 特に $|z| < 1$ ならば収束、$|z| > 1$ ならば発散であるから、$\rho = 1$. これが $\dfrac{1}{1-z}$ の (0 における, 0 のまわりの) Taylor 展開に他ならない。

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開

$\dfrac{1}{z+a}$ を 0 の周りで Taylor 展開してみよう。ただし $a \neq 0$ とする。

例 11.7

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{4+z} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-(-z/4)} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{4}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} z^n.$$

収束する $\Leftrightarrow \left|\frac{-z}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|-z|}{|4|} < 1 \Leftrightarrow |z| < 4$. ゆえに $\rho = 4$. 収束円は $D(0;4)$.

一般化しておくと: $a \neq 0$ であれば

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a-z} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-z/a} = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}}.$$

$\rho = |a|$. 収束円は $D(0;|a|)$. □

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開

$\dfrac{1}{z+a}$ を c の周りで Taylor 展開してみよう。ただし $a \neq -c$.

例 11.8

$\dfrac{1}{z+3}$ を 1 を中心とする冪級数に展開せよ。

1 のまわりで Taylor 展開せよ、と同じことである。

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{(z-1)+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{4}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(z-1)^n.$$

$$\text{収束する} \quad \Leftrightarrow \quad \left|-\frac{z-1}{4}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z-1| < 4.$$

ゆえに $\rho = 4$, 収束円は $D(1;4)$. □

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開

例 11.9

$f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ を 0 のまわりで Taylor 展開せよ。

(♯)
$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-z^2)^k = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k z^{2k}.$$

これは公比 $-z^2$ の等比数列であるから、

$$\text{収束する} \quad \Leftrightarrow \quad \left|-z^2\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z|^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z| < 1.$$

$f(z)$ は、

$$a_n := \begin{cases} (-1)^k & (n \text{ が偶数のとき、} n = 2k \text{ とおくと}) \\ 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

とおくと $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ と表せるので冪級数であり、$\rho = 1$. (続く)

例 11.9 (つづき)

こういうやり方もある。

$$f(z)=\frac{1}{(z+i)(z-i)}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)$$

$$=-\frac{i}{2}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{i^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(-i)^{n+1}}\right)\qquad \left(\frac{1}{z-a}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^{n+1}}\text{ を使った}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(i^n+(-i)^n\right)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{2}i^nz^n.$$

ここで止めても良いだろう。

n が奇数のとき、$(-1)^n+1=0$. $n=2k$ のとき $i^n=i^{2k}=(i^2)^k=(-1)^k$, $(-1)^n+1=2$ であるから

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{2}(-1)^kz^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kz^{2k}\quad ((\sharp)\text{ と一致する}).\quad \square$$

$\dfrac{1}{(z+a)^{n}}$ の c の周りで Taylor 展開してみよう。ただし $a \neq -c$.

例 11.10

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}.$$

まず、分母の冪の指数が 1 の場合 $(\dfrac{1}{z-1})$ は、上でやったやり方で

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (\text{収束半径は } 1).$$

両辺を微分すると (項別微分定理から)

$$-\frac{1}{(z-1)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n \quad (\text{収束半径は } 1).$$

$$\text{ゆえに} \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n \quad (\text{収束半径は } 1).$$

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開

原始関数の冪級数展開を求めてみよう (系 11.5 を使う)。

例 11.11

$f'(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$, $f(0) = 0$ を満たす f を求めよ (後で定義する $\tan^{-1} z$ に等しいが、そのことは使わない)。

(解答)　$f'(z)$ については既に次が分かっている。

$$f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k} \quad (\text{収束半径は } 1).$$

これから

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} + C \quad (\text{収束半径は } 1,\ C \text{ は積分定数}).$$

$f(0) = 0$ より $C = 0$. ゆえに

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1}.$$

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2021/complex2021.pdf (2014〜).