

複素関数・同演習 第 10 回

～冪級数 (3)～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/>

2021 年 10 月 20 日

目次

1 本日の内容・連絡事項

2 冪級数 (続き)

- 収束円 (残り)
 - 例の追加
- 一様収束
 - 言葉の説明: 項別積分, 項別微分
 - 半分スルーして良いイントロ
 - 各点収束, 一様収束の定義
 - 例
 - 一様収束の性質
 - Weierstrass の M test

3 参考文献

本日の内容・連絡事項

- 今回は、主に関数列の一致収束 (講義ノート [1] の§3.2) について説明します。
- 宿題 5 を出します (締め切りは 10 月 26 日 13:30)。

例 10.1 (ratio test を使わない例)

$\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = z^0 + z^1 + z^4 + z^9 + z^{16} + \dots$ の収束半径を調べよう。

$$c := 0, \quad a_n := \begin{cases} 1 & ((\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\}) n = k^2 \text{ であるとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

とおくと、 $\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$ である。冪級数である。ratio test は使えない。

$|z| < 1$ のとき、 $|a_n (z - c)^n| \leq |z|^n$ であり、 $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n$ は収束するから、優級数の定理に

より、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$ も収束する。

一方、 $|z| > 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n (z - c)^n = 0$ は成り立たないので ($\because n$ が平方数のとき

$|a_n (z - c)^n| = |z|^n > 1$)、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$ は発散する。ゆえに収束半径は 1。□

別解 上極限の定義から $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ 。ゆえに Cauchy-Hadamard の公式より、収束半径は $1/1 = 1$ 。

3.2 一様収束 3.2.0 言葉の説明: 項別積分, 項別微分

簡単のため、 \mathbb{R} の区間 $[a, b]$ 上で定義された関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (つまり、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$) について述べる。

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

が成り立つとき、**項別積分可能**であるという。(つまり \lim と積分の順序交換)

注 $f_n = \sum_{k=1}^n a_k$ のような級数の場合は $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x) dx$.

一方

$$\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

が成り立つとき、**項別微分可能**という。(つまり \lim と微分の順序交換)

注 級数の場合は $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$.

3.2.1 半分スルーして良いイントロ

冪級数の微分・積分を扱うのに、単なる各点収束では不十分である。一様収束が便利。

以下スルー可能

(参考) 関数論である程度話が進むと、「**広義一様収束** (まだ紹介していない) が便利」と分かって、冪級数の項別積分、項別微分も、次のように理解できる。

- Ⓐ 冪級数は収束円 $D(c; \rho)$ で広義一様収束する。— 比較的簡単
- Ⓑ 正則関数列が広義一様収束すれば、(線積分においても) 項別積分出来る。— 比較的簡単
- Ⓒ 正則関数列が広義一様収束すれば、極限関数は正則で、項別微分も出来る。— 証明には Cauchy の積分公式が必要

しかし Cauchy の積分公式の証明が出来るのはずっと先であるし、**初学者にいきなり「広義一様収束」はやや難しい**と思われるので、ここでは (次回) 次のように話を進める。

- Ⓐ 冪級数は、収束円 $D(c; \rho)$ 内の任意の閉円盤 $\overline{D}(c; R)$ で一様収束する。
(一般論により、一様収束するならば極限は連続で、項別積分出来る。)
- Ⓑ 「冪級数は収束円 $D(c; \rho)$ 内で何回でも項別微分できる」を直接証明する。

(余談: Fourier 解析でも、各点収束、一様収束、 L^2 収束、と色々な収束が出て来て、特に L^2 収束がかなり有効である。関数論では、広義一様収束がエライ。)

3.2.2 各点収束, 一様収束の定義

定義 10.2 (各点収束, 一様収束)

Ω は空でない集合、 $\{f_n\}_n$ は各 n に対して $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ とする。

- ① $\{f_n\}$ が f に Ω で (Ω 上) **各点収束** (単純収束) するとは、

$$(\forall z_0 \in \Omega) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_0) = f(z_0)$$

が成り立つことをいう。

- ② $\{f_n\}$ が f に Ω で (Ω 上) **一様収束** するとは、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)| = 0$$

が成り立つことをいう。

3.2.2 各点収束, 一様収束の定義

- (Ω が \mathbb{R} の区間であるとき、グラフを用いた説明)

$\sup_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)|$ は f_n と f の距離のようなもの、それが 0 に収束するとい
うことで、一様収束は自然な概念である。

- 一般に「 $\{f_n\}$ が f に一様収束するならば、 $\{f_n\}$ は f に各点収束する」が成
り立つ。実際、任意の $z_0 \in \Omega$ に対して

$$|f_n(z_0) - f(z_0)| \leq \sup_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

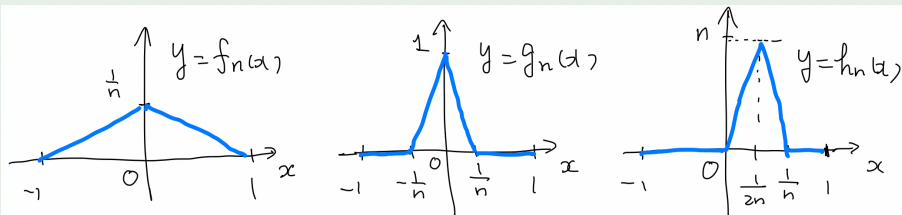
であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_0) = f(z_0)$ が成り立つ。

しかし、逆「各点収束するならば一様収束する」は一般には成り立たない。

3.2.3 例

例 10.2 (各点収束と一様収束、極限の連続性、項別積分)

$[-1, 1]$ で定義された関数列 $\{f_n\}_n, \{g_n\}_n, \{h_n\}_n$ を次のように定める。



いずれも各点収束する。任意の $x \in [-1, 1]$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) := 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x) := \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 0 & (x \neq 0), \end{cases} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = h(x) := 0.$$

($\because \{h_n\}$ について証明する。 $-1 \leq x \leq 0$ であれば、任意の n に対して $h_n(x) = 0$ 。
 $0 < x \leq 1$ であれば、十分大きな n に対して $\frac{1}{n} < x$ であるから $h_n(x) = 0$ 。ゆえに
 $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = 0$ 。この真似をして $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$ が示せる。)

3.2.3 例

例 10.2 (各点収束と一様収束、極限の連続性、項別積分 続き)

一様収束するか

$$\sup_{x \in [-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n}, \quad \sup_{x \in [-1,1]} |g_n(x) - g(x)| = 1, \quad \sup_{x \in [-1,1]} |h_n(x) - h(x)| = n.$$

($\because x \neq 0$ のとき、 $|g_n(x) - g(x)| = g_n(x)$. ここで $x \rightarrow 0$ とすると 1 に収束することに注意する。)

ゆえに $\{f_n\}$ は一様収束するが、 $\{g_n\}$ と $\{h_n\}$ は一様収束しない。

項別積分可能であるか

$$\int_{-1}^1 f_n(x) dx = \frac{1}{n} \rightarrow 0 = \int_{-1}^1 f(x) dx, \quad \int_{-1}^1 g_n(x) dx = \frac{1}{n} \rightarrow 0 = \int_{-1}^1 g(x) dx,$$
$$\int_{-1}^1 h_n(x) dx = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0 = \int_{-1}^1 h(x) dx.$$

ゆえに $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ は項別積分可能であるが、 $\{h_n\}$ は項別積分可能でない。

極限は連続か $\{f_n\}$ と $\{h_n\}$ の極限関数 f, h は連続であるが、 $\{g_n\}$ の極限関数 g は連続ではない。

3.2.3 例

例 10.2 (各点収束と一様収束、極限の連続性、項別積分 続き)

まとめると

	収束の種類	項別積分可能か	極限関数は連続か
$\{f_n\}$	一様収束	○	○
$\{g_n\}$	各点収束のみ	×	○
$\{h_n\}$	各点収束のみ	○	×

各点収束だけでは、項別積分可能性や極限関数の連続性は成り立たない。

3.2.4 一様収束の性質

一様収束する関数列は、色々良い性質を持つ。ここでは3つ述べるが、最初の2つが関数論で重要である。(3つ目は、関数論の場合、もっと便利な定理が成り立つので、使われない。)

Cf. 絶対収束する級数では、和を取る順序を変更しても和は変わらない、という定理など、色々便利なことが成り立つ。

3.2.4 一様収束の性質

簡単のため、まず $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ 連続, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は f に Ω で一様収束する、という場合を説明する。

結果だけを覚えるよりも証明まで覚えてしまうことを勧める。

- ① $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が Ω で f に一様収束するならば、 f は Ω で連続である。
(証明): $x_0 \in \Omega$ とする。 ε を任意の正の数とすると、 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が f に一様収束することから、ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

f_N は x_0 で連続であるから、ある $\delta > 0$ が存在して

$$(\forall x \in \Omega : |x - x_0| < \delta) \quad |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

すると $|x - x_0| < \delta$ を満たす任意の $x \in \Omega$ に対して

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq 2 \sup_{x' \in \Omega} |f(x') - f_N(x')| + |f_N(x) - f_N(x_0)| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

ゆえに f は x_0 で連続である。 □

3.2.4 一様収束の性質

- ② 一様収束するならば項別積分出来る、すなわち \lim と \int の順序交換出来る。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \left(\text{i.e. } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \right).$$

(証明) (1) より、 f は連続であることに注意しよう。

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| dx \\ &= \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| \int_a^b dx \\ &= (b - a) \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

であるから $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$. □

3.2.4 一様収束の性質

- ④ 各 n について f_n が C^1 級で、 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は f に各点収束し、 $\{f'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ はある関数 g に Ω で一様収束するならば、 f も C^1 級で $f' = g$. すなわち

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

(証明) 微積分の基本定理により、任意の $x \in [a, b]$ に対して

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt.$$

$n \rightarrow \infty$ とすると (f'_n が g に一様収束するので、(2) を使って)

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt.$$

右辺は微分可能で、微分係数は $g(x)$. ゆえに f も微分可能で $f'(x) = g(x)$. これは連続であるから f は C^1 級である。 □

(この定理は、証明の方が覚えやすいかもしれない。)

3.2.4 一様収束の性質

(実関数列の一様収束について説明したわけだが)

複素関数ではドーナル？

- ① 「一様収束する連続関数列の極限は連続」…同様に証明できる。
系として冪級数の和は連続である。
- ② 「一様収束するならば項別積分可能」…まだ複素線積分を定義していない訳であるが、同様に証明できる。
- ③ 実は**もっと本質的に強い定理**がある。
(3改) 「各 f_n が正則で、 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が f に広義一様収束するならば、 f は正則で $f' = \lim_{n \rightarrow \infty} (f'_n)$ 」

(このことの証明には、Cauchy の積分公式が必要で、証明出来るのはずっと後になる。それまで待てないので、冪級数については、もっと直接的に証明することにする。) ということで、関数論のテキストでは、上の (3) はスルーするのが普通である。

3.2.5 Weierstrass の M test

関数項級数の一様収束を証明するには、大抵 (95%以上?) は次の定理を用いる。

定理 10.3 (Weierstrass の M-test)

Ω は空でない集合、 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は Ω 上の関数列 (各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $a_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$)、数列 $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は

(i) $(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall z \in \Omega) |a_n(z)| \leq M_n$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束

を満たすとする。このとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ と $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は Ω で一様収束する。

結論部分を「 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は Ω で一様絶対収束する」という人が多い。特に $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は一様収束

するし (項別積分出来る)、各点 z で $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z)$ は絶対収束する (和の順序が変えられる)。

3.2.5 Weierstrass の M test 証明 前半

証明 (定理は優級数の定理に似ているが、証明も優級数の定理の証明のバージョンアップみたい。優級数の定理 Ver. 2 と言いたいくらい。)

$$s_n(z) := \sum_{k=1}^n a_k(z), \quad S_n(z) := \sum_{k=1}^n |a_k(z)|, \quad T_n := \sum_{k=1}^n M_k$$

とおく。任意の $z \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ に対して次式が成り立つ。

$$(*) \quad |s_n(z) - s_m(z)| \leq |S_n(z) - S_m(z)| \leq |T_n - T_m|$$

$n > m$ のときに証明すれば良い。次の3つの式から導かれる。

$$|s_n(z) - s_m(z)| = \left| \sum_{k=1}^n a_k(z) - \sum_{k=1}^m a_k(z) \right| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k(z) \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k(z)|.$$

$$\sum_{k=m+1}^n |a_k(z)| = \sum_{k=1}^n |a_k(z)| - \sum_{k=1}^m |a_k(z)| = S_n(z) - S_m(z) = |S_n(z) - S_m(z)|,$$

$$\sum_{k=m+1}^n |a_k(z)| \leq \sum_{k=m+1}^n M_k = \sum_{k=1}^n M_k - \sum_{k=1}^m M_k = T_n - T_m = |T_n - T_m|.$$

3.2.5 Weierstrass の M test 証明 後半

仮定より $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は収束列なので、Cauchy 列である。ゆえに (*) により $\{S_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{s_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ も Cauchy 列であるから、 \mathbb{C} の完備性によって収束する。

$$s(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z), \quad S(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) \quad (z \in \Omega),$$
$$T := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$$

とおく。

$$\text{(再掲*)} \quad |s_n(z) - s_m(z)| \leq |S_n(z) - S_m(z)| \leq |T_n - T_m|$$

で $m \rightarrow \infty$ とすると

$$(\forall z \in \Omega)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |s_n(z) - s(z)| \leq |S_n(z) - S(z)| \leq |T_n - T|.$$

$z \in \Omega$ について上限を取って (細かいことを言うと $(\forall z \in \Omega)(\forall n \in \mathbb{N})$ の順番を入れ替えてから)

$$\sup_{z \in \Omega} |s_n(z) - s(z)| \leq \sup_{z \in \Omega} |S_n(z) - S(z)| \leq |T_n - T|.$$

$n \rightarrow \infty$ のとき右辺は 0 に収束するので、 $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は S に、 $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は s に、それぞれ Ω で一様収束する。 □

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2021/complex2021.pdf> (2014～).