複素関数・同演習 第10回
～冪級数 (3) ～

桂田 祐史（かつらだ まさし）
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/

2021年10月20日

目次

本日の内容・連絡事項

- 今回は、主に関数列の一様収束 (講義ノート [1] の§3.2) について説明します。
- 宿題 5 を出します (締め切りは 10 月 26 日 13:30)。

例 10.1 (ratio test を使わない例)

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2}$$

例 10.1 (ratio test を使わない例)

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = z^0 + z^1 + z^4 + z^9 + z^{16} + \cdots$ の収束半径を調べよう。

例 10.1 (ratio test を使わない例)

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = z^0 + z^1 + z^4 + z^9 + z^{16} + \cdots$ の収束半径を調べよう。

$$c := 0, \quad a_n := \begin{cases} 1 & ((\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\})\ n = k^2 \text{ であるとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

とおくと、$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ である。冪級数である。ratio test は使えない。

例 10.1 (ratio test を使わない例)

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = z^0 + z^1 + z^4 + z^9 + z^{16} + \cdots$ の収束半径を調べよう。

$$c := 0, \quad a_n := \begin{cases} 1 & ((\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\})\ n = k^2 \text{ であるとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

とおくと、$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ である。冪級数である。ratio test は使えない。

$|z| < 1$ のとき、$|a_n(z-c)^n| \le |z|^n$ であり、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n$ は収束するから、優級数の定理により、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ も収束する。

例 10.1 (ratio test を使わない例)

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = z^0 + z^1 + z^4 + z^9 + z^{16} + \cdots$$ の収束半径を調べよう。

$$c := 0, \quad a_n := \begin{cases} 1 & ((\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\})\ n = k^2 \text{ であるとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

とおくと、$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ である。冪級数である。ratio test は使えない。

$|z| < 1$ のとき、$|a_n(z-c)^n| \le |z|^n$ であり、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n$ は収束するから、優級数の定理により、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ も収束する。

一方、$|z| > 1$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n(z-c)^n = 0$ は成り立たないので ($\because$ n が平方数のとき $|a_n(z-c)^n| = |z|^n > 1$)、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は発散する。ゆえに収束半径は 1. □

例 10.1 (ratio test を使わない例)

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = z^0 + z^1 + z^4 + z^9 + z^{16} + \cdots$ の収束半径を調べよう。

$$c := 0, \quad a_n := \begin{cases} 1 & ((\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\})\ n = k^2 \text{ であるとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

とおくと、$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ である。冪級数である。ratio test は使えない。

$|z| < 1$ のとき、$|a_n(z-c)^n| \le |z|^n$ であり、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n$ は収束するから、優級数の定理により、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ も収束する。

一方、$|z| > 1$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n(z-c)^n = 0$ は成り立たないので ($\because$ n が平方数のとき $|a_n(z-c)^n| = |z|^n > 1$)、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は発散する。ゆえに収束半径は 1. □

別解　上極限の定義から $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. ゆえに Cauchy-Hadamard の公式より、収束半径は $1/1 = 1$.

簡単のため、$\mathbb{R}$ の区間 $[a,b]$ 上で定義された関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (つまり、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、$f_n\colon [a,b]\to\mathbb{R}$) について述べる。

簡単のため、$\mathbb{R}$ の区間 $[a,b]$ 上で定義された関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (つまり、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、$f_n\colon [a,b]\to\mathbb{R}$) について述べる。

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

が成り立つとき、**項別積分可能**であるという。(つまり lim と積分の順序交換)

　簡単のため、$\mathbb{R}$ の区間 $[a,b]$ 上で定義された関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (つまり、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、$f_n\colon [a,b]\to\mathbb{R}$) について述べる。

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

が成り立つとき、**項別積分可能**であるという。(つまり lim と積分の順序交換)

注　$f_n=\sum_{k=1}^n a_k$ のような級数の場合は $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=1}^\infty a_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^\infty \int_a^b a_n(x)\,dx.$

簡単のため、$\mathbb{R}$ の区間 $[a, b]$ 上で定義された関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (つまり、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$f_n\colon [a, b] \to \mathbb{R}$) について述べる。

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

が成り立つとき、**項別積分可能**であるという。(つまり lim と積分の順序交換)

注　$f_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ のような級数の場合は $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b a_n(x)\,dx.$

一方

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx} f_n(x)$$

が成り立つとき、**項別微分可能**という。(つまり lim と微分の順序交換)

簡単のため、$\mathbb{R}$ の区間 $[a,b]$ 上で定義された関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (つまり、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、$f_n\colon[a,b]\to\mathbb{R}$) について述べる。

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

が成り立つとき、**項別積分可能**であるという。(つまり lim と積分の順序交換)

注　$f_n=\sum_{k=1}^n a_k$ のような級数の場合は $\int_a^b\sum_{n=1}^\infty a_n(x)\,dx=\sum_{n=1}^\infty\int_a^b a_n(x)\,dx.$

一方

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x)$$

が成り立つとき、**項別微分可能**という。(つまり lim と微分の順序交換)

注　級数の場合は $\left(\sum_{n=1}^\infty f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^\infty f_n'(x).$

3.2.1 半分スルーして良いイントロ

冪級数の微分・積分を扱うのに、単なる各点収束では不十分である。**一様収束が便利**。

以下スルー可能

3.2.1 半分スルーして良いイントロ

幂級数の微分・積分を扱うのに、単なる各点収束では不十分である。**一様収束が便利**。

以下スルー可能

(参考) 関数論である程度話が進むと、「**広義一様収束** (まだ紹介していない) が便利」と分かって、幂級数の項別積分、項別微分も、次のように理解できる。

(a) 幂級数は収束円で広義一様収束する。— 比較的簡単

(b) 正則関数列が広義一様収束すれば、(線積分においても) 項別積分出来る。— 比較的簡単

(c) 正則関数列が広義一様収束すれば、極限関数は正則で、項別微分も出来る。— 証明には Cauchy の積分公式が必要

3.2.1 半分スルーして良いイントロ

冪級数の微分・積分を扱うのに、単なる各点収束では不十分である。**一様収束が便利。**

以下スルー可能

(参考) 関数論である程度話が進むと、「**広義一様収束** (まだ紹介していない) が便利」と分かって、冪級数の項別積分、項別微分も、次のように理解できる。

(a) 冪級数は収束円で広義一様収束する。— 比較的簡単

(b) 正則関数列が広義一様収束すれば、(線積分においても) 項別積分出来る。— 比較的簡単

(c) 正則関数列が広義一様収束すれば、極限関数は正則で、項別微分も出来る。— 証明には Cauchy の積分公式が必要

しかし Cauchy の積分公式の証明が出来るのはずっと先であるし、初学者にいきなり「広義一様収束」はやや難しいと思われるので、ここでは (次回) 次のように話を進める。

(i) 冪級数は、収束円 $D(c;\rho)$ 内の任意の閉円盤 $\overline{D}(c;R)$ で一様収束する。
(一般論により、一様収束するならば極限は連続で、項別積分出来る。)

(ii) 「冪級数は収束円 $D(c;\rho)$ 内で何回でも項別微分できる」を直接証明する。

3.2.1 半分スルーして良いイントロ

幂級数の微分・積分を扱うのに、単なる各点収束では不十分である。**一様収束が便利**。

以下スルー可能

(参考) 関数論である程度話が進むと、「**広義一様収束** (まだ紹介していない) が便利」と分かって、幂級数の項別積分、項別微分も、次のように理解できる。

- (a) 幂級数は収束円で広義一様収束する。— 比較的簡単
- (b) 正則関数列が広義一様収束すれば、(線積分においても) 項別積分出来る。— 比較的簡単
- (c) 正則関数列が広義一様収束すれば、極限関数は正則で、項別微分も出来る。— 証明には Cauchy の積分公式が必要

しかし Cauchy の積分公式の証明が出来るのはずっと先であるし、初学者にいきなり「広義一様収束」はやや難しいと思われるので、ここでは (次回) 次のように話を進める。

- (i) 幂級数は、収束円 $D(c;\rho)$ 内の任意の閉円盤 $\overline{D}(c;R)$ で一様収束する。
  (一般論により、一様収束するならば極限は連続で、項別積分出来る。)
- (ii) 「幂級数は収束円 $D(c;\rho)$ 内で何回でも項別微分できる」を直接証明する。

(余談: Fourier 解析でも、各点収束、一様収束、L^2 収束、と色々な収束が出て来て、特に L^2 収束がかなり有効である。関数論では、広義一様収束がエライ。)

3.2.2 各点収束, 一様収束の定義

定義 10.2 (各点収束, 一様収束)

Ω は空でない集合、$\{f_n\}_n$ は各 n に対して $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ とする。

3.2.2 各点収束, 一様収束の定義

定義 10.2 (各点収束, 一様収束)

Ω は空でない集合、$\{f_n\}_n$ は各 n に対して $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ とする。

1. $\{f_n\}$ が f に Ω で (Ω 上) **各点収束** (単純収束) するとは、

$$(\forall z_0 \in \Omega) \quad \lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = f(z_0)$$

が成り立つことをいう。

定義 10.2 (各点収束, 一様収束)

Ω は空でない集合、$\{f_n\}_n$ は各 n に対して $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ とする。

1. $\{f_n\}$ が f に Ω で (Ω 上) **各点収束** (単純収束) するとは、
$$(\forall z_0 \in \Omega) \quad \lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = f(z_0)$$
が成り立つことをいう。
2. $\{f_n\}$ が f に Ω で (Ω 上) **一様収束**するとは、
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\Omega} |f_n(z) - f(z)| = 0$$
が成り立つことをいう。

3.2.2 各点収束, 一様収束の定義

- (Ω が $\mathbb{R}$ の区間であるとき、グラフを用いた説明)

3.2.2 各点収束, 一様収束の定義

- (Ω が $\mathbb{R}$ の区間であるとき、グラフを用いた説明)

  $\sup_{z\in\Omega}|f_n(z)-f(z)|$ は f_n と f の距離のようなもの、それが 0 に収束するということで、一様収束は自然な概念である。

- 一般に「$\{f_n\}$ が f に一様収束するならば、$\{f_n\}$ は f に各点収束する」が成り立つ。実際、任意の $z_0\in\Omega$ に対して

  $$|f_n(z_0)-f(z_0)|\le\sup_{z\in\Omega}|f_n(z)-f(z)|\to 0\quad(n\to\infty)$$

  であるから、$\lim_{n\to\infty}f_n(z_0)=f(z_0)$ が成り立つ。

3.2.2 各点収束, 一様収束の定義

- (Ω が $\mathbb{R}$ の区間であるとき、グラフを用いた説明)

  $\sup_{z\in\Omega}|f_n(z)-f(z)|$ は f_n と f の距離のようなもの、それが 0 に収束するということで、一様収束は自然な概念である。

- 一般に「$\{f_n\}$ が f に一様収束するならば、$\{f_n\}$ は f に各点収束する」が成り立つ。実際、任意の $z_0\in\Omega$ に対して

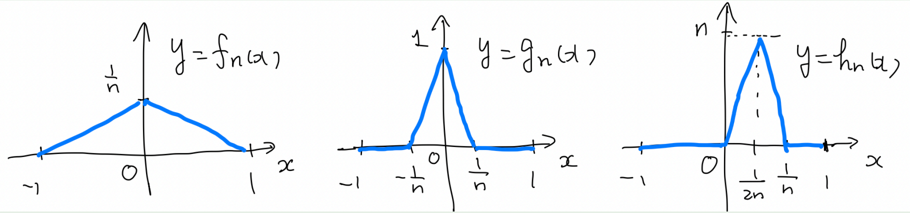
$$|f_n(z_0)-f(z_0)|\le\sup_{z\in\Omega}|f_n(z)-f(z)|\to 0\quad(n\to\infty)$$

  であるから、$\lim_{n\to\infty}f_n(z_0)=f(z_0)$ が成り立つ。
  しかし、逆「各点収束するならば一様収束する」は一般には成り立たない。

3.2.3 例

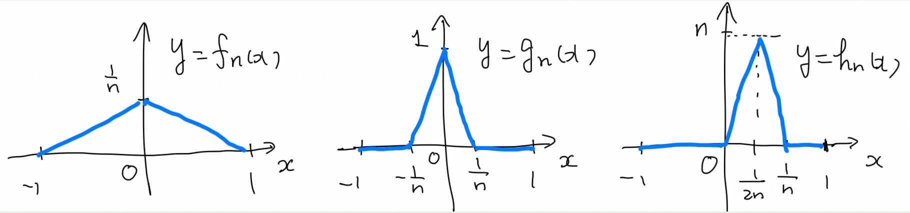
例 10.2 (各点収束と一様収束、極限の連続性、項別積分)

$[-1,1]$ で定義された関数列 $\{f_n\}_n$, $\{g_n\}_n$, $\{h_n\}_n$ を次のように定める。



例 10.2 (各点収束と一様収束、極限の連続性、項別積分)

$[-1,1]$ で定義された関数列 $\{f_n\}_n$, $\{g_n\}_n$, $\{h_n\}_n$ を次のように定める。

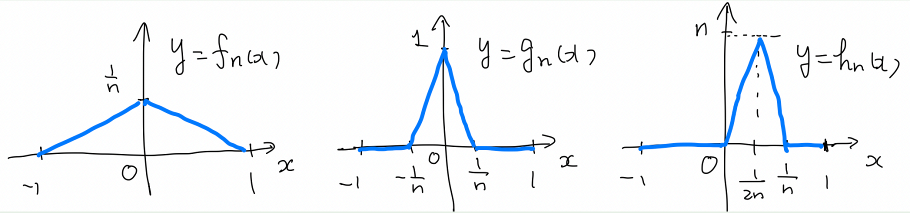


いずれも各点収束する。任意の $x \in [-1,1]$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) := 0, \quad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) := \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 0 & (x \neq 0), \end{cases} \quad \lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x) := 0.$$

例 10.2 (各点収束と一様収束、極限の連続性、項別積分)

$[-1,1]$ で定義された関数列 $\{f_n\}_n$, $\{g_n\}_n$, $\{h_n\}_n$ を次のように定める。



いずれも各点収束する。任意の $x\in[-1,1]$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x):=0,\quad \lim_{n\to\infty} g_n(x)=g(x):=\begin{cases}1 & (x=0)\\ 0 & (x\neq 0),\end{cases}\quad \lim_{n\to\infty} h_n(x)=h(x):=0.$$

($\because$ $\{h_n\}$ について証明する。$-1\le x\le 0$ であれば、任意の n に対して $h_n(x)=0$. $0<x\le 1$ であれば、十分大きな n に対して $\frac{1}{n}<x$ であるから $h_n(x)=0$. ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} h_n(x)=0$. この真似をして $\displaystyle\lim_{n\to\infty} g_n(x)=g(x)$ が示せる。)

3.2.3 例

例 10.2 (各点収束と一様収束、極限の連続性、項別積分　続き)

一様収束するか

$$\sup_{x\in[-1,1]}|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{n},\quad \sup_{x\in[-1,1]}|g_n(x)-g(x)|=1,\quad \sup_{x\in[-1,1]}|h_n(x)-h(x)|=n.$$

($\because$ $x\neq 0$ のとき、$|g_n(x)-g(x)|=g_n(x)$. ここで $x\to 0$ とすると 1 に収束することに注意する。)
ゆえに $\{f_n\}$ は一様収束するが、$\{g_n\}$ と $\{h_n\}$ は一様収束しない。

項別積分可能であるか

$$\int_{-1}^{1}f_n(x)dx=\frac{1}{n}\to 0=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx,\quad \int_{-1}^{1}g_n(x)dx=\frac{1}{n}\to 0=\int_{-1}^{1}g(x)\,dx,$$
$$\int_{-1}^{1}h_n(x)dx=\frac{1}{2}\not\to 0=\int_{-1}^{1}h(x)\,dx.$$

ゆえに $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ は項別積分可能であるが、$\{h_n\}$ は項別積分可能でない。

極限は連続か　$\{f_n\}$ と $\{h_n\}$ の極限関数 f, h は連続であるが、$\{g_n\}$ の極限関数 g は連続ではない。

例 10.2 (各点収束と一様収束、極限の連続性、項別積分　続き)

まとめると

	収束の種類	項別積分可能か	極限関数は連続か
$\{f_n\}$	一様収束	○	○
$\{g_n\}$	各点収束のみ	×	○
$\{h_n\}$	各点収束のみ	○	×

各点収束だけでは、項別積分可能性や極限関数の連続性は成り立たない。

3.2.4 一様収束の性質

一様収束する関数列は、色々良い性質を持つ。ここでは 3 つ述べるが、最初の 2 つが関数論で重要である。(3 つ目は、関数論の場合、もっと便利な定理が成り立つので、使われない。)

3.2.4 一様収束の性質

一様収束する関数列は、色々良い性質を持つ。ここでは 3 つ述べるが、最初の 2 つが関数論で重要である。(3 つ目は、関数論の場合、もっと便利な定理が成り立つので、使われない。)

Cf. 絶対収束する級数では、和を取る順序を変更しても和は変わらない、という定理など、色々と便利なことが成り立つ。

3.2.4 一様収束の性質

簡単のため、まず $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$ 連続, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に Ω で一様収束する、という場合を説明する。

3.2.4 一様収束の性質

簡単のため、まず $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ 連続, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に Ω で一様収束する、という場合を説明する。

結果だけを覚えるよりも証明まで覚えてしまうことを勧める。

3.2.4 一様収束の性質

簡単のため、まず $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ 連続, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に Ω で一様収束する、という場合を説明する。

結果だけを覚えるよりも証明まで覚えてしまうことを勧める。

1. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Ω で f に一様収束するならば、f は Ω で連続である。

3.2.4 一様収束の性質

簡単のため、まず $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ 連続, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に Ω で一様収束する、という場合を説明する。

結果だけを覚えるよりも証明まで覚えてしまうことを勧める。

1. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Ω で f に一様収束するならば、f は Ω で連続である。
(証明): $x_0 \in \Omega$ とする。ε を任意の正の数とするとき、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に一様収束することから、ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

3.2.4 一様収束の性質

簡単のため、まず $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ 連続, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に Ω で一様収束する、という場合を説明する。

結果だけを覚えるよりも証明まで覚えてしまうことを勧める。

1. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Ω で f に一様収束するならば、f は Ω で連続である。
(証明): $x_0 \in \Omega$ とする。ε を任意の正の数とするとき、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に一様収束することから、ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して
$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$
f_N は x_0 で連続であるから、ある $\delta > 0$ が存在して
$$(\forall x \in \Omega : |x - x_0| < \delta) \quad |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

3.2.4 一様収束の性質

簡単のため、まず $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ 連続, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に Ω で一様収束する、という場合を説明する。

結果だけを覚えるよりも証明まで覚えてしまうことを勧める。

1. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Ω で f に一様収束するならば、f は Ω で連続である。
(証明): $x_0 \in \Omega$ とする。ε を任意の正の数とするとき、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に一様収束することから、ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

f_N は x_0 で連続であるから、ある $\delta > 0$ が存在して

$$(\forall x \in \Omega : |x - x_0| < \delta) \quad |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

すると $|x - x_0| < \delta$ を満たす任意の $x \in \Omega$ に対して

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq 2 \sup_{x'\in\Omega} \left|f(x') - f_N(x')\right| + |f_N(x) - f_N(x_0)| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

ゆえに f は x_0 で連続である。 □

3.2.4 一様収束の性質

2. 一様収束するならば項別積分出来る、すなわち lim と $\int$ の順序交換出来る。

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx \quad \left(\text{i.e. } \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\right).$$

3.2.4 一様収束の性質

2. 一様収束するならば項別積分出来る、すなわち lim と $\int$ の順序交換出来る。

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \quad \left(\text{i.e. } \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\right).$$

(証明)　(1) より、f は連続であることに注意しよう。

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| &\le \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx \le \int_a^b \sup_{x\in\Omega}|f_n(x)-f(x)|\,dx \\
&= \sup_{x\in\Omega}|f_n(x)-f(x)| \int_a^b dx \\
&= (b-a)\sup_{x\in\Omega}|f_n(x)-f(x)| \to 0
\end{aligned}$$

であるから $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx.$ □

3.2.4 一様収束の性質

3. 各 n について f_n が C^1 級で、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に各点収束し、$\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ はある関数 g に Ω で一様収束するならば、f も C^1 級で $f'=g$. すなわち

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

3. 各 n について f_n が C^1 級で、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に各点収束し、$\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ はある関数 g に Ω で一様収束するならば、f も C^1 級で $f'=g$. すなわち

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

(証明) 微積分の基本定理により、任意の $x\in[a,b]$ に対して

$$f_n(x)=f_n(a)+\int_a^x f_n'(t)\,dt.$$

$n\to\infty$ とすると (f_n' が g に一様収束するので、(2) を使って)

$$f(x)=f(a)+\int_a^x g(t)\,dt.$$

右辺は微分可能で、微分係数は $g(x)$. ゆえに f も微分可能で $f'(x)=g(x)$. これは連続であるから f は C^1 級である。 □

(この定理は、証明の方が覚えやすいかもしれない。)

3.2.4 一様収束の性質

(実関数列の一様収束について説明したわけだが)

複素関数ではドーナル？

1. 「一様収束する連続関数列の極限は連続」…同様に証明できる。系として冪級数の和は連続である。
2. 「一様収束するならば項別積分可能」…まだ複素線積分を定義していない訳であるが、同様に証明できる。
3. 実は**もっと本質的に強い定理**がある。

   (3 改) 「各 f_n が正則で、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に広義一様収束するならば、f は正則で $f' = \lim_{n\to\infty}(f_n')$」

   (このことの証明には、Cauchy の積分公式が必要で、証明出来るのはずっと後になる。それまで待てないので、冪級数については、もっと直接的に証明することにする。) ということで、関数論のテキストでは、上の (3) はスルーするのが普通である。

3.2.5 Weierstrass の M test

関数項級数の一様収束を証明するには、大抵 (95%以上？) は次の定理を用いる。

3.2.5 Weierstrass の M test

　関数項級数の一様収束を証明するには、大抵 (95%以上？) は次の定理を用いる。

定理 10.3 (Weierstrass の M-test)

　Ω は空でない集合、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω 上の関数列 (各 $n\in\mathbb{N}$ に対して、$a_n\colon \Omega\to\mathbb{C}$), 数列 $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は

(i) $(\forall n\in\mathbb{N})\ (\forall z\in\Omega)\ |a_n(z)|\le M_n$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束

を満たすとする。このとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は Ω で一様収束する。

3.2.5 Weierstrass の M test

関数項級数の一様収束を証明するには、大抵 (95%以上？) は次の定理を用いる。

定理 10.3 (Weierstrass の M-test)

Ω は空でない集合、$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Ω 上の関数列 (各 $n\in\mathbb{N}$ に対して、$a_n\colon\Omega\to\mathbb{C}$), 数列 $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は

1. $(\forall n\in\mathbb{N})\ (\forall z\in\Omega)\ |a_n(z)|\le M_n$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束

を満たすとする。このとき、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は Ω で一様収束する。

結論部分を「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は Ω で一様絶対収束する」という人が多い。特に $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は一様収束するし (項別積分出来る)、各点 z で $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z)$ は絶対収束する (和の順序が変えられる)。

証明　(定理は優級数の定理に似ているが、証明も優級数の定理の証明のバージョンアップみたい。優級数の定理 Ver. 2 と言いたいくらい。)

3.2.5 Weierstrass の M test　証明 前半

証明　(定理は優級数の定理に似ているが、証明も優級数の定理の証明のバージョンアップみたい。優級数の定理 Ver. 2 と言いたいくらい。)

$$s_n(z) := \sum_{k=1}^{n} a_k(z), \quad S_n(z) := \sum_{k=1}^{n} |a_k(z)|, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} M_k$$

とおく。任意の $z \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ に対して次式が成り立つ。

$$(*) \qquad |s_n(z) - s_m(z)| \le |S_n(z) - S_m(z)| \le |T_n - T_m|$$

証明　(定理は優級数の定理に似ているが、証明も優級数の定理の証明のバージョンアップみたい。優級数の定理 Ver. 2 と言いたいくらい。)

$$s_n(z) := \sum_{k=1}^{n} a_k(z), \quad S_n(z) := \sum_{k=1}^{n} |a_k(z)|, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} M_k$$

とおく。任意の $z \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ に対して次式が成り立つ。

$$(*) \qquad |s_n(z) - s_m(z)| \le |S_n(z) - S_m(z)| \le |T_n - T_m|$$

$n > m$ のときに証明すれば良い。次の 3 つの式から導かれる。

$$|s_n(z) - s_m(z)| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_k(z) - \sum_{k=1}^{m} a_k(z) \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k(z) \right| \le \sum_{k=m+1}^{n} |a_k(z)| .$$

3.2.5 Weierstrass の M test　証明 前半

証明　(定理は優級数の定理に似ているが、証明も優級数の定理の証明のバージョンアップみたい。優級数の定理 Ver. 2 と言いたいくらい。)

$$s_n(z) := \sum_{k=1}^{n} a_k(z), \quad S_n(z) := \sum_{k=1}^{n} |a_k(z)|, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} M_k$$

とおく。任意の $z \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ に対して次式が成り立つ。

$$(*) \qquad |s_n(z) - s_m(z)| \le |S_n(z) - S_m(z)| \le |T_n - T_m|$$

$n > m$ のときに証明すれば良い。次の 3 つの式から導かれる。

$$|s_n(z) - s_m(z)| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k(z) - \sum_{k=1}^{m} a_k(z)\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k(z)\right| \le \sum_{k=m+1}^{n} |a_k(z)|.$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} |a_k(z)| = \sum_{k=1}^{n} |a_k(z)| - \sum_{k=1}^{m} |a_k(z)| = S_n(z) - S_m(z) = |S_n(z) - S_m(z)|,$$

3.2.5 Weierstrass の M test　証明 前半

証明　(定理は優級数の定理に似ているが、証明も優級数の定理の証明のバージョンアップみたい。優級数の定理 Ver. 2 と言いたいくらい。)

$$s_n(z) := \sum_{k=1}^{n} a_k(z), \quad S_n(z) := \sum_{k=1}^{n} |a_k(z)|, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} M_k$$

とおく。任意の $z \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ に対して次式が成り立つ。

$$(*) \qquad |s_n(z) - s_m(z)| \le |S_n(z) - S_m(z)| \le |T_n - T_m|$$

$n > m$ のときに証明すれば良い。次の 3 つの式から導かれる。

$$|s_n(z) - s_m(z)| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_k(z) - \sum_{k=1}^{m} a_k(z) \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k(z) \right| \le \sum_{k=m+1}^{n} |a_k(z)|.$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} |a_k(z)| = \sum_{k=1}^{n} |a_k(z)| - \sum_{k=1}^{m} |a_k(z)| = S_n(z) - S_m(z) = |S_n(z) - S_m(z)|,$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} |a_k(z)| \le \sum_{k=m+1}^{n} M_k = \sum_{k=1}^{n} M_k - \sum_{k=1}^{m} M_k = T_n - T_m = |T_n - T_m|.$$

仮定より $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束列なので、Cauchy 列である。ゆえに $(*)$ により $\{S_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{s_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ も Cauchy 列であるから、$\mathbb{C}$ の完備性によって収束する。

$$s(z) := \lim_{n\to\infty} s_n(z), \quad S(z) := \lim_{n\to\infty} S_n(z) \quad (z\in\Omega),$$
$$T := \lim_{n\to\infty} T_n$$

とおく。

仮定より $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束列なので、Cauchy 列である。ゆえに $(*)$ により $\{S_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{s_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ も Cauchy 列であるから、$\mathbb{C}$ の完備性によって収束する。

$$s(z) := \lim_{n\to\infty} s_n(z), \quad S(z) := \lim_{n\to\infty} S_n(z) \quad (z \in \Omega),$$
$$T := \lim_{n\to\infty} T_n$$

とおく。

(再掲 $*$) $$|s_n(z) - s_m(z)| \le |S_n(z) - S_m(z)| \le |T_n - T_m|$$

で $m \to \infty$ とすると

$$(\forall z \in \Omega)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |s_n(z) - s(z)| \le |S_n(z) - S(z)| \le |T_n - T|.$$

$z \in \Omega$ について上限を取って (細かいことを言うと $(\forall z \in \Omega)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ の順番を入れ替えてから)

$$\sup_{z\in\Omega} |s_n(z) - s(z)| \le \sup_{z\in\Omega} |S_n(z) - S(z)| \le |T_n - T|.$$

3.2.5 Weierstrass の M test　証明 後半

仮定より $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は収束列なので、Cauchy 列である。ゆえに $(*)$ により $\{S_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{s_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ も Cauchy 列であるから、$\mathbb{C}$ の完備性によって収束する。

$$s(z) := \lim_{n\to\infty} s_n(z), \quad S(z) := \lim_{n\to\infty} S_n(z) \quad (z \in \Omega),$$
$$T := \lim_{n\to\infty} T_n$$

とおく。

(再掲 $*$) $\qquad |s_n(z) - s_m(z)| \le |S_n(z) - S_m(z)| \le |T_n - T_m|$

で $m\to\infty$ とすると

$$(\forall z\in\Omega)(\forall n\in\mathbb{N}) \quad |s_n(z) - s(z)| \le |S_n(z) - S(z)| \le |T_n - T|.$$

$z\in\Omega$ について上限を取って (細かいことを言うと $(\forall z\in\Omega)$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ の順番を入れ替えてから)

$$\sup_{z\in\Omega} |s_n(z) - s(z)| \le \sup_{z\in\Omega} |S_n(z) - S(z)| \le |T_n - T|.$$

$n\to\infty$ のとき右辺は 0 に収束するので、$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は S に、$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は s に、それぞれ Ω で一様収束する。 □

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2021/complex2021.pdf (2014〜).