複素関数・同演習第 9 回

〜 冪級数 (2) 〜

かつらだ　まさし
桂田 祐史

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/

2021 年 10 月 19 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 本日は冪級数の収束半径の求め方 (講義ノート [1] の§3.1 の後半) を解説します。この話は実は難しい話が色々あるけれど、それには深入りせず、ほどほどのところで切り上げます。
- 対面授業 (実質的にハイブリッド授業) のやり方は工夫していくつもりです。当面
  - 授業で用いるスライドは事前に (なるべく前日までに) 公開します。(スライドの内容は随時修正しますが、授業の後の修正は「訂正・補足」に書きます。)
  - 授業内容を収録した動画を授業実施日の夜に公開します。
  - 出欠は Oh-o! Meiji の出欠管理を用います。前回こちらが失敗してすみませんでした (公開するのを忘れた…)。本日のパスワードは `hp7xk` です。
- 宿題 5 を出します (〆切は 10 月 26 日 13:30, 問題公開・提出は「複素関数演習」の方で行います)。
- 宿題 4 の解説をします。

与えられた冪級数に対して、どのように収束半径を求めるかが問題となる。ある意味で究極の解答がある。使うのが難しいので推奨しないが、紹介はしておく。

定理 9.1 (Cauchy-Hadamard の公式 (判定法))

ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径 ρ は、$\dfrac{1}{0}=+\infty$, $\dfrac{1}{+\infty}=0$ という約束の元で

$$\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{1}$$

ここで $\limsup$ は上極限を表す。

- 任意の $\{a_n\}$ に対して、$\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ が確定するので、すべての冪級数に対して公式 (1) が適用できる。これは大きな長所である。
- $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ をどうやって求めるかは問題として残る。この講義では、$\limsup$ を求める練習に時間をかけられないので、この定理を使わない方法を推奨することにする。

3.1.2 Cauchy-Hadamard の公式

一応 lim sup (上極限) の定義を書いておく。簡単な場合は、定義から $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ がすぐ求められるかもしれない。(例えば $\limsup_{n\to\infty} \left[(-1)^n + \frac{1}{n}\right] = 1$.)

上極限の定義

$\{a_n\}$ を実数列, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする。$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lambda$ とは、次の 2 条件を満たすことをいう。

1. $(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N)\ a_n < \lambda + \varepsilon.$
   これは十分大きい任意の n に対して $a_n < \lambda + \varepsilon$ が成り立つ、ということ。
2. $(\forall\varepsilon > 0)\ (\forall N \in \mathbb{N})\ (\exists n \in \mathbb{N}\colon\ n \geq N)\ a_n > \lambda - \varepsilon.$
   これは $a_n > \lambda - \varepsilon$ を満たす n は無限個ある、ということ。

- $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$ とは、任意の $U \in \mathbb{R}$ に対して、$a_n > U$ を満たす n が無限個存在する、ということ。
- $\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$ とは、$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ を満たす、ということ。

上極限について、詳しいことが知りたければ、例えば杉浦 [2] V.1 を見よ。

3.1.2 Cauchy-Hadamard の公式

Cauchy-Hadamard の公式の簡略化バージョンを掲げておく。

系 9.2 (Cauchy-Hadamard の公式 簡略版)

ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ に対して、$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ が確定 (収束または $+\infty$ に発散) するならば、収束半径 ρ は、$\dfrac{1}{0}=+\infty$, $\dfrac{1}{+\infty}=0$ という約束の元で

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

証明 「$\lim_{n\to\infty} A_n$ が確定すれば $\limsup_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n$」が成り立つ (これは簡単に確認できる) から。 □

今後、収束半径の議論をしているとき、つねに

$$\frac{1}{0}=+\infty,\ \frac{1}{+\infty}=0$$

と約束していることにする。

3.1.3 ratio test

多くの場合、次の定理を使って収束半径が求められる。

定理 9.3 (d'Alembert の判定法, ratio test)

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ が確定するならば、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ の収束半径は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

証明　$c=0$ の場合に証明すれば良い。

$\rho:=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ とおく。$|z|<\rho$ ならば収束し、$|z|>\rho$ ならば発散することを示す。

z が $|z|<\rho$ を満たすとする。$|z|<R<\rho$ となる R をとる。

ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して、$(\forall n\in\mathbb{N}\colon\ n\geq N)$ $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|>R$ が成り立つ。

この条件を満たす N を一つとる。$m\geq 0$ とするとき

$$\left|a_{N+m}z^{N+m}\right|=\left|a_N\frac{a_{N+1}}{a_N}\cdot\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\cdots\frac{a_{N+m}}{a_{N+m-1}}z^Nz^m\right|\leq\left|a_Nz^N\right|\left(\frac{|z|}{R}\right)^m.$$

言い換えると任意の $n\geq N$ に対して

$$|a_nz^n|\leq\left|a_Nz^N\right|\left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N}.$$

(次のスライドに続く)

そこで

$$b_n := \begin{cases} |a_n z^n| & (0 \le n \le N-1) \\ \left|a_N z^N\right| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N} & (n \ge N) \end{cases}$$

とおくと、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$|a_n z^n| \le b_n$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n z^n| + \frac{\left|a_N z^N\right|}{1 - |z|/R} \quad (\text{収束}).$$

優級数の定理 (定理 8.2) より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束する。

一方、$|z| > \rho$ とする。$|z| > R > \rho$ となる R をとる。

ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $(\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n \ge N)$ $\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| < R$ が成り立つ。

上と同様にして、任意の $n \ge N$ に対して

$$|a_n z^n| \ge \left|a_N z^N\right| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N}.$$

$|z|/R > 1$ であるから、$a_n z^n$ は 0 に収束しない。ゆえに $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は発散する。

以上から、ρ は収束半径である。 □

収束半径を求める例をいくつか示す。
冪級数の中心を c, 係数を a_n, 収束半径を ρ と表すことにする。

例 9.4 (最も基本的で重要な冪級数 — 等比級数)

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. $\rho = 1$. 収束円は $D(0;1)$.

これは色々なやり方で証明できる。

- (既出) 公比 z の等比級数なので、収束 $\Leftrightarrow |z| < 1$. 特に $|z| < 1$ ならば収束、$|z| > 1$ ならば発散する。ゆえに収束半径は 1 である。

$c = 0$, $a_n = 1$ である。

- $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} 1 = 1$ であるから、Cauchy-Hadamard の判定法により $\rho = \dfrac{1}{1} = 1$.
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$ であるから、ratio test により $\rho = 1$.

上の例を少しだけ一般化してみる。

例 9.5 (等比級数)

$c_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ とするとき、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-c_0}{R}\right)^n$ の収束半径を調べよう。

$c = c_0$, $a_n = \dfrac{1}{R^n}$ である。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{R^{n+1}}{R^n} = R.$$

ゆえに ratio test より $\rho = R$. 収束円は $D(c_0; R)$.

(別解) これは公比が $\dfrac{z-c_0}{R}$ の等比級数であるから、

$$\text{収束} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{z-c_0}{R}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z-c_0| < R.$$

ゆえに ($|z-c_0| < R$ で収束、$|z-c_0| > R$ で発散するので) 収束半径は R. 収束円は $D(c_0; R)$. □

3.1.4 例

例 9.6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n.$$

このとき $c = 0,\ a_n = \dfrac{1}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$ である。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = (1+0)^2 = 1.$$

ゆえに ratio test より $\rho = 1$. 収束円は $D(0; 1)$.

例 9.7

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n.$$

このとき $c = 0,\ a_n = n^2$ $(n \in \mathbb{N})$ である。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^2} = \frac{1}{(1+0)^2} = 1.$$

ゆえに ratio test より $\rho = 1$. 収束円は $D(0; 1)$.

例 9.8

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$ このとき $c = 0$, $a_n = \dfrac{1}{n!}$ $(n \in \mathbb{N})$ である。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty.$$

ゆえに ratio test より $\rho = +\infty$. 収束円は $\mathbb{C}$.

例 9.9

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n.$$ このとき $c = 0$, $a_n = n!$ $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ であるので

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

ゆえに ratio test より $\rho = 0$. 収束円は $\emptyset$.

3.1.4 例

(簡単なまとめ)

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径は同じ。収束円の中心が c, 0 という違いがある。
- k を定数とするとき、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n$ の収束半径は、k が何であっても 1.
- $c \neq 0$ とするとき、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c^n z^n$ の収束半径は $\dfrac{1}{|c|}$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ の収束半径はそれぞれ 0, $+\infty$.

3.1.4 例

例 9.10

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{n}(z-1)^n.$$

このとき $c=1$, $a_n = \dfrac{(-2)^{n-1}}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, $a_0 = 0$ である。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|(-2)^{n-1}/n\right|}{|(-2)^n/(n+1)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

ゆえに ratio test より $\rho = \frac{1}{2}$. 収束円は $D(1;1/2)$.

例 9.11

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}.$$ (実は $\sin z$ の Taylor 展開だがそのことは使わない)。

$$c=0,\quad a_n=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} & (n \text{ は奇数}, k \text{ を } n=2k+1 \text{ で定めて})\\ 0 & (n \text{ は偶数}).\end{cases}$$

$a_n=0$ となる n が無限個あるので、d'Alembert の公式は直接は使えない。
$\zeta := z^2$ とおくと [a]

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}=z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\zeta^k.$$

[a] 共通因数 z をくくり出したわけだが、「一般に級数の一般項に (0 以外の) 定数をかけることで収束発散は変わらない」ことに注意すると、収束する場合も、収束しない場合も正しいことが分かる。

例 9.11 (つづき)

　そこで

$$(\star) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \zeta^k$$

の収束発散が問題となる。

$$b_k := \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

とおくと $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \left| \frac{b_k}{b_{k+1}} \right| = +\infty$ であることは簡単に分かる。ゆえに $(\star)$ の収束半径は $+\infty$. ゆえに $(\star)$ は任意の $\zeta \in \mathbb{C}$ に対して収束する。

　ゆえに元の級数は、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して収束する。ゆえに $\rho = +\infty$.

例 9.11 (つづき　別解)

Cauchy-Hadamard の公式の簡略版 (系 9.2) を使って示すことも出来る。

$$0 \le \sqrt[n]{|a_n|} \le \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \quad (n\text{ が奇数のとき等号成立})$$

という評価が成り立ち、実は

(2) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty \quad (\text{次のスライドで証明})$$

であるから、はさみうちの原理により $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. ゆえに系 9.2 の公式から、$\rho = \dfrac{1}{0} = +\infty$ である。

3.1.5 埋め草 (やや難しい, 時間に余裕があれば, 授業ではカット？)

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$ を示すことが残っている。
これを示すには、**Stirling の公式**

$$\log n! \sim n\log n - n + O(\log n) \tag{3}$$

を使うという方法がある。それ以外に、次のような初等的な方法もある。

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = \prod_{k=1}^{[n/2]-1} k \cdot \prod_{k=[n/2]}^{n} k \ge \prod_{k=1}^{[n/2]-1} 1 \cdot \prod_{k=[n/2]}^{n} [n/2] \ge ([n/2])^{n-[n/2]+1} \ge [n/2]^{n/2}$$

であるから ([　] は整数部分を表す)、

$$\sqrt[n]{n!} \ge \left([n/2]^{n/2}\right)^{1/n} = \sqrt{[n/2]} \to +\infty.$$

(証明終)

$\sin z$ の Taylor 展開の収束半径が $+\infty$ であることを二つの方法で示したが、Hadamard の公式を使う方は少し難しく感じる人が多いのではないだろうか。Cauchy-Hadamard の公式は「究極の公式」であるが、使うためには覚えるべきことがたくさんあって、使いやすいかどうかは別問題であると思う。

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$ などを覚えてしまう、という手はあるけれど…

3.1.5 埋め草

以下の 2 つの命題も知っておくと、Cauchy-Hadamard の公式が使いやすいかもしれない。

定理 9.12

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

証明は簡単なので (？)、各自に任せる (後の授業の定理 11.3 の中で言及する)。

定理 9.13

$\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は非負実数からなる数列、$\lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, A は $\mathbb{N}$ の無限部分集合で、次の 2 条件を満たすとする。

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n = \lambda.$
2. $(\forall n \in A)\ p_n = q_n.$
3. $(\forall n \in \mathbb{N} \setminus A)\ p_n \le \lambda.$

このとき $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} p_n = \lambda.$

証明は簡単なので、各自に任せる。

次にこの命題を用いる例を紹介するが、この命題を用いるよりも簡単な別解がある。

例 9.14

z を変数とする級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{n^2}$ を考える。

$$c = 0,\ a_n := \begin{cases} 1 & (n \text{ が平方数、すなわち } (\exists k \in \mathbb{N})\ n = k^2 \text{ が成り立つとき}) \\ 0 & (n \text{ が平方数でないとき}) \end{cases}$$ とおくと $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ と表せるので、z の冪級数である。実は収束半径は 1 である。

証明 1　Cauchy-Hadamard の判定法を使ってみよう。

$$p_n := \sqrt[n]{|a_n|}, \quad q_n := 1 \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \lambda := 1,$$

$$A := \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; (\exists k \in \mathbb{N}) \quad n = k^2 \right\} \quad (\text{平方数の全体})$$

とおくとき、定理 9.13 の条件が満たされる。実際、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n = \lambda$, $(\forall n \in A)\ p_n = q_n$, $(\forall n \in \mathbb{N} \setminus A)\ p_n = 0 \le \lambda$.

ゆえに $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda = 1$. ゆえに $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2}$ の収束半径は $\dfrac{1}{1} = 1$ である。 □

(むしろ上極限の定義まで戻った方が簡単かもしれない…)

例 9.14 (つづき)

証明 2 (宿題に類題を出すので、わざと簡単に書きます。) $|z|<1$ ならば収束し (例えば優級数の定理)、$|z|\ge 1$ ならば発散する (一般項 $z^{n^2}\to 0$ ではないから)。ゆえに収束半径は 1 である。 □

例 9.15

$A_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ のとき $\limsup_{n\to\infty} A_n = 1$. この数列は 1, -1 に「集積する」。実は「数列の上極限は、数列の集積点 (授業では定義していない) のうちで最大のもの」である。

定理 9.16 (Cauchy-Hadamard (普通の級数バージョン))

正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ において、$\displaystyle\lambda := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ とおくとき、

1. $0 \le \lambda < 1$ ならば $\sum a_n$ は収束する。
2. $\lambda > 1$ ($\lambda = +\infty$ も含む) ならば $\sum a_n$ は発散する。

証明

1. $0 \le \lambda < 1$ とする。$\lambda < \mu < 1$ となる μ を (任意に) 1つ選ぶ。定義から
$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \ge N) \quad \sqrt[n]{a_n} < \mu.$$
ゆえに $n \ge N$ のとき $a_n < \mu^n$ が成り立つ。
$$b_n := \begin{cases} a_n & (1 \le n \le N-1) \\ \mu^n & (n \ge N) \end{cases}$$
とおくと、$(\forall n \in \mathbb{N})$ $a_n \le b_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \frac{\mu^N}{1-\mu}$. 優級数定理により $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

2. $\lambda > 1$ とする。$1 < \mu < \lambda$ となる μ を (任意に) 1 つ選ぶ。任意の自然数 N に対して、$n \geq N$, $\sqrt[n]{a_n} > \mu$ を満たす自然数 n が存在する。この n に対して、$a_n > \mu^n > 1$.

   ゆえに $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ は成り立たないので、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しない。 □

この定理から、冪級数の収束半径に関する Cauchy-Hadamard の公式 (定理 9.1) を証明するのは難しくない。

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-c)^n|} = |z-c| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

これが < 1 ならば収束し、> 1 ならば発散する。すなわち

- $|z-c| < \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ ならば収束
- $|z-c| > \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ ならば発散

ゆえに収束半径は $\dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$. □

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2021/complex2021.pdf (2014〜).

[2] 杉浦光夫：解析入門 I, 東京大学出版会 (1980), 詳しい (しばしば辞書的といわれる)。丸善 eBook では、https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046843 でアクセスできる. この eBook まともな目次を付けてほしい.