複素関数・同演習 第8回
～冪級数 (1)～

桂田 祐史（かつらだ まさし）
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/

2021年10月13日

目次

本日の内容・連絡事項

- 冪級数 (講義ノート [1] の §3) の解説を始めます。授業 6,7 回程度の時間がかかる長い話で、最初のうちは「知っている」はずのこともあるけれど、新しいことがたくさん出て来ます。油断しないように。

本日の内容・連絡事項

- 冪級数 (講義ノート [1] の §3) の解説を始めます。授業 6,7 回程度の時間がかかる長い話で、最初のうちは「知っている」はずのこともあるけれど、新しいことがたくさん出て来ます。油断しないように。
- 宿題 4 を出します (締め切りは 10 月 19 日 (火曜) 13:30)。

本日の内容・連絡事項

- 冪級数 (講義ノート [1] の §3) の解説を始めます。授業 6,7 回程度の時間がかかる長い話で、最初のうちは「知っている」はずのこともあるけれど、新しいことがたくさん出て来ます。油断しないように。
- 宿題 4 を出します (締め切りは 10 月 19 日 (火曜) 13:30)。
- 今回は問 3 の解説をします (問 2 の解説は 10 月 12 日の「複素関数」で行いました)。

本日の内容・連絡事項

- 冪級数 (講義ノート [1] の §3) の解説を始めます。授業 6,7 回程度の時間がかかる長い話で、最初のうちは「知っている」はずのこともあるけれど、新しいことがたくさん出て来ます。油断しないように。
- 宿題 4 を出します (締め切りは 10 月 19 日 (火曜) 13:30)。
- 今回は問 3 の解説をします (問 2 の解説は 10 月 12 日の「複素関数」で行いました)。

3 冪級数

いよいよ冪級数について調べ始める。冪級数は、微積分でも大きな話題であったが、複素関数の範疇で考えることでその本質が浮き彫りにされる。

3 冪級数

いよいよ冪級数について調べ始める。冪級数は、微積分でも大きな話題であったが、複素関数の範疇で考えることでその本質が浮き彫りにされる。

冪級数(ベキ)とは、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の形の級数のことをいう。(ここで $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は複素数列、c は複素数である。)

3 冪級数

いよいよ冪級数について調べ始める。冪級数は、微積分でも大きな話題であったが、複素関数の範疇で考えることでその本質が浮き彫りにされる。

冪級数（ベキ）とは、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の形の級数のことをいう。(ここで $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は複素数列、c は複素数である。)

雑談　「冪」（べき）は、わかんむり「冖」に幕府の「幕」からなる漢字だが、しばしば「巾」と略される。個人的に「巾」が嫌いであるが、「冪」と書くのは面倒だし、見にくいので、「板書では「ベキ」とカタカナで通す」と例年言っている。今年度はスライドなので「冪」「ベキ」が混じるかも。

3 冪級数

いよいよ冪級数について調べ始める。冪級数は、微積分でも大きな話題であったが、複素関数の範疇で考えることでその本質が浮き彫りにされる。

冪級数(ベキ)とは、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の形の級数のことをいう。(ここで $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は複素数列、c は複素数である。)

雑談　「冪」(べき)は、わかんむり「冖」に幕府の「幕」からなる漢字だが、しばしば「巾」と略される。個人的に「巾」が嫌いであるが、「冪」と書くのは面倒だし、見にくいので、「板書では「ベキ」とカタカナで通す」と例年言っている。今年度はスライドなので「冪」「ベキ」が混じるかも。

宿題でも「ベキ」と書いて構わない。

3 冪級数

いよいよ冪級数について調べ始める。冪級数は、微積分でも大きな話題であったが、複素関数の範疇で考えることでその本質が浮き彫りにされる。

冪級数(ベキ)とは、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の形の級数のことをいう。(ここで $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は複素数列、c は複素数である。)

雑談　「冪(べき)」は、わかんむり「冖」に幕府の「幕」からなる漢字だが、しばしば「巾」と略される。個人的に「巾」が嫌いであるが、「冪」と書くのは面倒だし、見にくいので、「板書では「ベキ」とカタカナで通す」と例年言っている。今年度はスライドなので「冪」「ベキ」が混じるかも。

宿題でも「ベキ」と書いて構わない。

ベキ級数の話はかなり長くなるので、この節で何が分かるか、少し長めのイントロを用意した。

3.1 イントロ

「解析的 (analytic)」、「解析関数」という言葉がある。

$$\textbf{解析的} \stackrel{\text{def.}}{=} \text{定義域の各点の近傍で収束するベキ級数に展開できる}$$

3.1 イントロ

「解析的 (analytic)」、「解析関数」という言葉がある。

解析的 $\stackrel{\text{def.}}{=}$ 定義域の各点の近傍で収束するベキ級数に展開できる

「解析関数」を解析的な関数という意味に取ると、実は「正則関数」と同じ意味であることが後で分かる (正則 $\Leftrightarrow$ 解析的)。一方で「解析関数」という言葉は、少し違った意味 (解析接続で定まる関数など) で使われることもある。

いくつか事実を述べる。

1. 高校生の知っている関数 (多項式関数, 有理関数, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, e^x, $\log(1+x)$, $(1+x)^\alpha$) はほとんどが Taylor 展開可能である (例外は $|x|$ とか)。つまり $f\colon I \to \mathbb{R}$ に対して

$$(\forall c \in I)(\exists \varepsilon > 0) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \quad (|x-c| < \varepsilon).$$

   これはベキ級数である (「Taylor 展開は冪級数」)。ゆえに f は解析的 (実解析的) である。

   x を複素変数 z に置き換えると複素関数に拡張できる。それらは解析的 (かつ正則) である。

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ について: "**収束円**" が存在する。

$(\exists\rho\colon 0 \le \rho \le +\infty)\ (|z-c| < \rho \Rightarrow \text{収束}) \land (|z-c| > \rho \Rightarrow \text{発散})$

3.1 イントロ

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ について: “**収束円**” が存在する。

$(\exists\rho\colon 0 \le \rho \le +\infty)\ (|z-c| < \rho \Rightarrow \text{収束}) \wedge (|z-c| > \rho \Rightarrow \text{発散})$

ρ を**収束半径**、$D(c;\rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < \rho\}$ を**収束円**とよぶ。

$\rho = 0$ のとき $D(c;\rho) = \emptyset$, $\rho = +\infty$ のとき $D(c;\rho) = \mathbb{C}$.
(円というときは、ふつうは $0 < \rho < +\infty$ であるが)

3.1 イントロ

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ について: “**収束円**” が存在する。

   $(\exists\rho\colon 0 \le \rho \le +\infty)\ (|z-c| < \rho \Rightarrow \text{収束}) \wedge (|z-c| > \rho \Rightarrow \text{発散})$

   ρ を**収束半径**、$D(c;\rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < \rho\}$ を**収束円**とよぶ。

   $\rho = 0$ のとき $D(c;\rho) = \emptyset$, $\rho = +\infty$ のとき $D(c;\rho) = \mathbb{C}$.
   (円というときは、ふつうは $0 < \rho < +\infty$ であるが)

   $\rho > 0$ のとき**収束ベキ級数**という。

3.1 イントロ

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ について: "**収束円**" が存在する。

   $(\exists \rho\colon 0 \le \rho \le +\infty)\ (|z-c| < \rho \Rightarrow \text{収束}) \wedge (|z-c| > \rho \Rightarrow \text{発散})$

   ρ を**収束半径**、$D(c;\rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < \rho\}$ を**収束円**とよぶ。

   $\rho = 0$ のとき $D(c;\rho) = \emptyset$, $\rho = +\infty$ のとき $D(c;\rho) = \mathbb{C}$.
   (円というときは、ふつうは $0 < \rho < +\infty$ であるが)

   $\rho > 0$ のとき**収束ベキ級数**という。

   収束円の内部ではかなり自由な演算が出来る。とても簡単 (多項式関数とあまり変わらない)。

   a. 項別微分出来る。

   $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-c)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z-c)^n.$$

   冪級数は収束円 $D(c;\rho)$ 内で正則。ゆえに「解析的ならば正則」。

3.1 イントロ

- (b) 項別積分が出来る。後で曲線 C に沿う線積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を導入するが、収束円 $D(c;\rho)$ 内の曲線 C (始点 a, 終点 b として) に対して

$$\int_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z-c)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{(z-c)^{n+1}}{n+1}\right]_{z=a}^{z=b}.$$

- (b) 項別積分が出来る。後で曲線 C に沿う線積分 $\int_C f(z)\,dz$ を導入するが、収束円 $D(c;\rho)$ 内の曲線 C (始点 a, 終点 b として) に対して

$$\int_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z-c)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{(z-c)^{n+1}}{n+1}\right]_{z=a}^{z=b}.$$

3. 正則関数はベキ級数展開出来る (「正則ならば解析的」)。
つまり Ω が $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ 正則とするとき、任意の $c \in \Omega$ に対して、ある $\varepsilon > 0$ が存在して $D(c;\varepsilon) \subset \Omega$ が成り立つが、このとき

$$(\exists!\{a_n\}_{n\geq 0})(\forall z \in D(c;\varepsilon)) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n.$$

3.1 イントロ

(b) 項別積分が出来る。後で曲線 C に沿う線積分 $\int_C f(z)\,dz$ を導入するが、収束円 $D(c;\rho)$ 内の曲線 C (始点 a, 終点 b として) に対して

$$\int_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z-c)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{(z-c)^{n+1}}{n+1}\right]_{z=a}^{z=b}.$$

(3) 正則関数はベキ級数展開出来る (「正則ならば解析的」)。
つまり Ω が $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ 正則とするとき、任意の $c\in\Omega$ に対して、ある $\varepsilon>0$ が存在して $D(c;\varepsilon)\subset\Omega$ が成り立つが、このとき

$$(\exists!\{a_n\}_{n\geq 0})(\forall z\in D(c;\varepsilon))\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n.$$

($\exists!$ は一意的に存在することを表す記号)
(ベキ級数の収束半径 ρ は $\rho\geq\varepsilon$ を満たす、ということになる。)

3.1 イントロ

- (b) 項別積分が出来る。後で曲線 C に沿う線積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を導入するが、収束円 $D(c;\rho)$ 内の曲線 C (始点 a, 終点 b として) に対して

$$\int_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z-c)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{(z-c)^{n+1}}{n+1}\right]_{z=a}^{z=b}.$$

3. 正則関数はベキ級数展開出来る (「正則ならば解析的」)。
つまり Ω が $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ 正則とするとき、任意の $c\in\Omega$ に対して、ある $\varepsilon>0$ が存在して $D(c;\varepsilon)\subset\Omega$ が成り立つが、このとき

$$(\exists!\{a_n\}_{n\ge 0})(\forall z\in D(c;\varepsilon))\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n.$$

($\exists!$ は一意的に存在することを表す記号)
(ベキ級数の収束半径 ρ は $\rho\ge\varepsilon$ を満たす、ということになる。)

この節では、主に (2) の証明を目標にする (ただし (b) は積分の定義をしてから)。(3) を証明するにはたくさんの準備が必要で、証明するのは少し後になる。

補題 8.1 (ある点で収束すれば、より中心に近い任意の点で収束する)

べキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z=z_0$ で収束するならば、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす任意の $z\in\mathbb{C}$ で収束する。

補題 8.1 (ある点で収束すれば、より中心に近い任意の点で収束する)

べキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z=z_0$ で収束するならば、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす任意の $z\in\mathbb{C}$ で収束する。

証明　$z_0=c$ のとき $|z-c|<|z_0-c|$ を満たす z が存在しないので証明不要。

補題 8.1 (ある点で収束すれば、より中心に近い任意の点で収束する)

べキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z=z_0$ で収束するならば、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす任意の $z\in\mathbb{C}$ で収束する。

証明　$z_0=c$ のとき $|z-c|<|z_0-c|$ を満たす z が存在しないので証明不要。
$z_0\neq c$ として示す。級数が収束するので一般項は 0 に収束する:

$$\lim_{n\to\infty} a_n(z_0-c)^n=0.$$

補題 8.1 (ある点で収束すれば、より中心に近い任意の点で収束する)

べキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z = z_0$ で収束するならば、$|z-c| < |z_0 - c|$ を満たす任意の $z \in \mathbb{C}$ で収束する。

証明　$z_0 = c$ のとき $|z-c| < |z_0 - c|$ を満たす z が存在しないので証明不要。
$z_0 \neq c$ として示す。級数が収束するので一般項は 0 に収束する:

$$\lim_{n\to\infty} a_n(z_0 - c)^n = 0.$$

ゆえに

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \quad |a_n(z_0 - c)^n| \leq M.$$

補題 8.1 (ある点で収束すれば、より中心に近い任意の点で収束する)

ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z=z_0$ で収束するならば、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす任意の $z\in\mathbb{C}$ で収束する。

証明　$z_0=c$ のとき $|z-c|<|z_0-c|$ を満たす z が存在しないので証明不要。
$z_0\neq c$ として示す。級数が収束するので一般項は 0 に収束する:

$$\lim_{n\to\infty} a_n(z_0-c)^n=0.$$

ゆえに

$$(\exists M\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\})\quad |a_n(z_0-c)^n|\le M.$$

$b_n:=M\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|^n$ とおくと、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす z に対して

$$|a_n(z-c)^n|=|a_n(z_0-c)^n|\left|\frac{(z-c)^n}{(z_0-c)^n}\right|\le M\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|^n=b_n.$$

補題 8.1 (ある点で収束すれば、より中心に近い任意の点で収束する)

べキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z=z_0$ で収束するならば、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす任意の $z\in\mathbb{C}$ で収束する。

証明　$z_0=c$ のとき $|z-c|<|z_0-c|$ を満たす z が存在しないので証明不要。
$z_0\neq c$ として示す。級数が収束するので一般項は 0 に収束する:

$$\lim_{n\to\infty} a_n(z_0-c)^n=0.$$

ゆえに

$$(\exists M\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\})\quad |a_n(z_0-c)^n|\le M.$$

$b_n:=M\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|^n$ とおくと、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす z に対して

$$|a_n(z-c)^n|=|a_n(z_0-c)^n|\left|\frac{(z-c)^n}{(z_0-c)^n}\right|\le M\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|^n=b_n.$$

$\{b_n\}$ は公比 $\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|<1$ の等比数列であるから、$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ は収束する。

補題 8.1 (ある点で収束すれば、より中心に近い任意の点で収束する)

ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z=z_0$ で収束するならば、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす任意の $z\in\mathbb{C}$ で収束する。

証明　$z_0=c$ のとき $|z-c|<|z_0-c|$ を満たす z が存在しないので証明不要。
$z_0\neq c$ として示す。級数が収束するので一般項は 0 に収束する:

$$\lim_{n\to\infty} a_n(z_0-c)^n=0.$$

ゆえに

$$(\exists M\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\})\quad |a_n(z_0-c)^n|\le M.$$

$b_n:=M\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|^n$ とおくと、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす z に対して

$$|a_n(z-c)^n|=|a_n(z_0-c)^n|\left|\frac{(z-c)^n}{(z_0-c)^n}\right|\le M\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|^n=b_n.$$

$\{b_n\}$ は公比 $\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|<1$ の等比数列であるから、$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ は収束する。優級数の定理から $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は収束する。 □

3.2.1 収束円の存在

定理 8.2 (優級数の定理)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して　(i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \le b_n$　(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する

を満たす $\{b_n\}$ が存在すれば、$\sum a_n$ は絶対収束する。(ゆえに $\sum a_n$ は収束する。)

3.2.1 収束円の存在

定理 8.2 (優級数の定理)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して (i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \le b_n$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する

を満たす $\{b_n\}$ が存在すれば、$\sum a_n$ は絶対収束する。(ゆえに $\sum a_n$ は収束する。)

証明

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$$

とおく。

定理 8.2 (優級数の定理)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して (i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \leq b_n$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する

を満たす $\{b_n\}$ が存在すれば、$\sum a_n$ は絶対収束する。(ゆえに $\sum a_n$ は収束する。)

証明

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$$

とおく。$n > m$ のとき

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{m} |a_k| \right| \quad .$$

定理 8.2 (優級数の定理)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して (i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \leq b_n$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する

を満たす $\{b_n\}$ が存在すれば、$\sum a_n$ は絶対収束する。(ゆえに $\sum a_n$ は収束する。)

証明

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$$

とおく。$n > m$ のとき

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{m} |a_k| \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \right| .$$

定理 8.2 (優級数の定理)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して (i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \le b_n$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する

を満たす $\{b_n\}$ が存在すれば、$\sum a_n$ は絶対収束する。(ゆえに $\sum a_n$ は収束する。)

証明

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$$

とおく。$n > m$ のとき

$$|S_n - S_m| = \left|\sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{m} |a_k|\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} |a_k|\right| \le \sum_{k=m+1}^{n} b_k \qquad .$$

定理 8.2 (優級数の定理)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して (i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \leq b_n$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する

を満たす $\{b_n\}$ が存在すれば、$\sum a_n$ は絶対収束する。(ゆえに $\sum a_n$ は収束する。)

証明

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$$

とおく。$n > m$ のとき

$$|S_n - S_m| = \left|\sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{m} |a_k|\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} |a_k|\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} b_k = T_n - T_m = |T_n - T_m|.$$

n, m の大小関係によらず $|S_n - S_m| \leq |T_n - T_m|$ が成り立つことが分かる。

定理 8.2 (優級数の定理)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して　(i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \leq b_n$　(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する

を満たす $\{b_n\}$ が存在すれば、$\sum a_n$ は絶対収束する。(ゆえに $\sum a_n$ は収束する。)

証明

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$$

とおく。$n > m$ のとき

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{m} |a_k| \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} b_k = T_n - T_m = |T_n - T_m|.$$

n, m の大小関係によらず $|S_n - S_m| \leq |T_n - T_m|$ が成り立つことが分かる。ゆえに

$$\sum b_n \text{ が収束} \Leftrightarrow \{T_n\} \text{ が収束} \Leftrightarrow \{T_n\} \text{ が Cauchy 列}$$

$$\Rightarrow \{S_n\} \text{ が Cauchy 列} \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ が収束} \Leftrightarrow \sum |a_n| \text{ が収束}$$

$$\Rightarrow \sum a_n \text{ が収束.} \quad \square$$

3.2.1 収束円の存在

上の最後の $\Rightarrow$ で使った「絶対収束するならば収束」は「常識」だけれど、その証明自身が優級数の定理の証明とよく似ているので、証明してみよう。

定理 8.3 (級数が絶対収束するならば収束する)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を複素数列とする。$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束するならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する。

3.2.1 収束円の存在

上の最後の $\Rightarrow$ で使った「絶対収束するならば収束」は「常識」だけれど、その証明自身が優級数の定理の証明とよく似ているので、証明してみよう。

定理 8.3 (級数が絶対収束するならば収束する)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を複素数列とする。$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束するならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する。

証明 $\displaystyle s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\displaystyle S_n := \sum_{k=1}^{n}|a_k|$ とおく。$n > m$ ならば

$$|s_n - s_m| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=m+1}^{n}|a_k| = S_n - S_m = |S_n - S_m|.$$

$m > n$ ならば (途中同様にして) $|s_n - s_m| = |s_m - s_m| \le S_m - S_n = |S_n - S_m|$.
ゆえに一般に $|s_n - s_m| \le |S_n - S_m|$ が成り立つ。

3.2.1 収束円の存在

上の最後の $\Rightarrow$ で使った「絶対収束するならば収束」は「常識」だけれど、その証明自身が優級数の定理の証明とよく似ているので、証明してみよう。

定理 8.3 (級数が絶対収束するならば収束する)

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を複素数列とする。$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束するならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する。

証明 $s_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$, $S_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n}|a_k|$ とおく。$n > m$ ならば

$$|s_n - s_m| = \left|\sum_{k=1}^{n}a_k - \sum_{k=1}^{m}a_k\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n}a_k\right| \le \sum_{k=m+1}^{n}|a_k| = S_n - S_m = |S_n - S_m|.$$

$m > n$ ならば (途中同様にして) $|s_n - s_m| = |s_m - s_m| \le S_m - S_n = |S_n - S_m|$.
ゆえに一般に $|s_n - s_m| \le |S_n - S_m|$ が成り立つ。ゆえに

$$\sum|a_n| \text{ が収束} \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ が収束} \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ が Cauchy 列}$$

$$\Rightarrow \{s_n\} \text{ が Cauchy 列} \Leftrightarrow \{s_n\} \text{ が収束} \Leftrightarrow \sum a_n \text{ が収束.} \quad \square$$

3.2.1 収束円の存在

補題 8.1 を思い出すと

$|z_1 - c| < |z_0 - c|$ とする。級数が z_0 で収束するならば、z_1 でも収束する。
収束する点より (冪級数の中心から見て) 近い点では収束する

補題 8.1 を思い出すと

$|z_1 - c| < |z_0 - c|$ とする。級数が z_0 で収束するならば、z_1 でも収束する。
収束する点より (冪級数の中心から見て) 近い点では収束する

対偶を取ると

$|z_1 - c| < |z_0 - c|$ とする。級数が z_1 で発散するならば、z_0 でも発散する。

3.2.1 収束円の存在

補題 8.1 を思い出すと

$|z_1 - c| < |z_0 - c|$ とする。級数が z_0 で収束するならば、z_1 でも収束する。
収束する点より (冪級数の中心から見て) 近い点では収束する

対偶を取ると

$|z_1 - c| < |z_0 - c|$ とする。級数が z_1 で発散するならば、z_0 でも発散する。

定理の形にしておく。

系 8.4 (ある点で発散すれば、より中心から遠い任意の点で発散する)

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z = z_1$ で発散するならば、$|z-c| > |z_1 - c|$ を満たす任意の z に対して発散する。

以上の準備のもと、収束円の存在定理を証明する。

定理 8.5 (収束半径・収束円の存在)

$c \in \mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は複素数列とする。このとき冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ について、次のうちどれか 1 つ (だけ) が成立する。

(i) 任意の $z \neq c$ に対して発散する。

(注: $z = c$ ではつねに収束する。$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n = a_0 + 0 + 0 + \cdots = a_0$.)

(ii) 任意の $z \in \mathbb{C}$ で収束する。

(iii) ある $\rho \in (0, +\infty)$ が存在して、$|z-c| < \rho$ ならば収束し、$|z-c| > \rho$ ならば発散する。

3.2.1 収束円の存在

証明のあらすじ　(i) でも、(ii) でもないと仮定すると、収束する z_1 $(\neq c)$, 発散する z_0 が存在する。

3.2.1 収束円の存在

証明のあらすじ　(i) でも、(ii) でもないと仮定すると、収束する z_1 $(\neq c)$, 発散する z_0 が存在する。

上の補題 (あるいは系) により $|z_1 - c| \leq |z_0 - c|$.

3.2.1 収束円の存在

証明のあらすじ　(i) でも、(ii) でもないと仮定すると、収束する z_1 $(\neq c)$, 発散する z_0 が存在する。

上の補題 (あるいは系) により $|z_1 - c| \leq |z_0 - c|$.
もしも等号が成り立つならば、$\rho := |z_1 - c|$ $(= |z_0 - c|)$ とおけば良い。

3.2.1 収束円の存在

証明のあらすじ　(i) でも、(ii) でもないと仮定すると、収束する z_1 $(\neq c)$, 発散する z_0 が存在する。

上の補題 (あるいは系) により $|z_1 - c| \leq |z_0 - c|$.
もしも等号が成り立つならば、$\rho := |z_1 - c|$ $(= |z_0 - c|)$ とおけば良い。

以下では、$|z_1 - c| < |z_0 - c|$ と仮定する。図を描いて、2 色のペンを持ち、「z_1 よりも c に近いところでは収束」、「z_0 よりも c から遠いところでは発散」。ここから二分法を始める。簡単なのだが、文章だけで説明するとかえって面倒な (一応、講義ノート [1] には書いておいたが、読みにくい) ので省略する。

定義 8.6 (収束半径, 収束円)

上の定理の状況で、(iii) 以外の場合で、(i) のとき $\rho := 0$, (ii) のとき $\rho = +\infty$ とおき、ρ を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の**収束半径**という。また

$$D(c;\rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < \rho\}$$

を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の**収束円** (the circle of convergence) という。
($\rho = 0$ のとき $D(c;\rho) = \emptyset$, $\rho = +\infty$ のとき $D(c;\rho) = \mathbb{C}$ であることに注意)

定義 8.6 (収束半径, 収束円)

上の定理の状況で、(iii) 以外の場合で、(i) のとき $\rho := 0$, (ii) のとき $\rho = +\infty$ とおき、ρ を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の**収束半径**という。また

$$D(c;\rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < \rho\}$$

を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の**収束円** (the circle of convergence) という。
($\rho = 0$ のとき $D(c;\rho) = \emptyset$, $\rho = +\infty$ のとき $D(c;\rho) = \mathbb{C}$ であることに注意)

この定義から

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n \text{ の収束半径が } \rho \Leftrightarrow |z-c| < \rho \text{ ならば収束かつ } |z-c| > \rho \text{ ならば発散}$$

何かある数が収束半径であることを示すために、このことはよく使われる。

3.2.1 収束円の存在

注意 8.7 (収束円の境界)

収束円の境界 $|z-c|=\rho$ の上にある z でどうなるか。収束するか、発散するか、上の定理は何も言ってない。それはケース・バイ・ケース (後で例を見る)。

3.2.1 収束円の存在

注意 8.7 (収束円の境界)

収束円の境界 $|z-c|=\rho$ の上にある z でどうなるか。収束するか、発散するか、上の定理は何も言ってない。それはケース・バイ・ケース (後で例を見る)。

例 8.8 (等比級数は冪級数, この際収束条件をチェックしておく)

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. これは $c=0$, $a_n=1$ $(n\ge 0)$ の場合である。実は等比級数である。

注意 8.7 (収束円の境界)

収束円の境界 $|z-c|=\rho$ の上にある z でどうなるか。収束するか、発散するか、上の定理は何も言ってない。それはケース・バイ・ケース (後で例を見る)。

例 8.8 (等比級数は冪級数，この際収束条件をチェックしておく)

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. これは $c=0$, $a_n=1$ $(n\ge 0)$ の場合である。実は等比級数である。

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-z^{n+1}}{1-z} & (z\ne 1) \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1) & (z=1) \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-z} & (|z|<1) \\ \text{発散} & (|z|\ge 1). \end{cases}$$

3.2.1 収束円の存在

注意 8.7 (収束円の境界)

収束円の境界 $|z-c|=\rho$ の上にある z でどうなるか。収束するか、発散するか、上の定理は何も言ってない。それはケース・バイ・ケース (後で例を見る)。

例 8.8 (等比級数は冪級数, この際収束条件をチェックしておく)

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. これは $c=0$, $a_n=1$ $(n\geq 0)$ の場合である。実は等比級数である。

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-z^{n+1}}{1-z} & (z\neq 1) \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1) & (z=1) \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-z} & (|z|<1) \\ \text{発散} & (|z|\geq 1). \end{cases}$$

これから、$|z|<1$ ならば収束、$|z|>1$ ならば発散する。ゆえに収束半径は 1, 収束円は $D(0;1)$. この結果は、実は非常に非常に重要である。冪級数は等比級数に似ていて、その収束・発散は等比級数と比較して証明されることが多いから。

3.2.1 収束円の存在　補足 $\lim_{n\to\infty} r^n$

$r\in\mathbb{C}$ に対して、$\lim_{n\to\infty} r^n$ を調べておく。

$|r|<1$ ならば

$$|r^n|=|r|^n\to 0 \quad (n\in\infty).$$

ゆえに $\lim_{n\to\infty} r^n=0$.

一方、$|r|>1$ ならば

$$|r^n|=|r|^n\to +\infty \quad (n\in\infty).$$

ゆえに $\{r^n\}$ は収束しない (「収束列は有界」に反する)。

以下 $|r|=1$ とする。極形式 $r=e^{i\theta}$ $(0\le\theta<2\pi)$ を用いて考える。$\theta=0$ の場合は $r=1$ であるから、$\lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty} 1=1$. $0<\theta<2\pi$ の場合は、$r^n=r^{in\theta}$ は単位円周を (一定の角度で) 周りつづけて止まらないので、収束しない。

3.2.1 収束円の存在　補足 $\lim_{n\to\infty} r^n$

$r\in\mathbb{C}$ に対して、$\lim_{n\to\infty} r^n$ を調べておく。

$|r|<1$ ならば

$$|r^n| = |r|^n \to 0 \quad (n\in\infty).$$

ゆえに $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

一方、$|r|>1$ ならば

$$|r^n| = |r|^n \to +\infty \quad (n\in\infty).$$

ゆえに $\{r^n\}$ は収束しない (「収束列は有界」に反する)。

以下 $|r|=1$ とする。極形式 $r=e^{i\theta}$ $(0\le\theta<2\pi)$ を用いて考える。$\theta=0$ の場合は $r=1$ であるから、$\lim_{n\to\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$. $0<\theta<2\pi$ の場合は、$r^n = r^{in\theta}$ は単位円周を (一定の角度で) 周りつづけて止まらないので、収束しない。

…というようなことを授業の動画で話したが、最後の部分は次のようにするのが、論理的にはすっきりしているかも。

$|r|=1$, $r\neq 1$ とする。もしも $\{r^n\}$ が収束するならば $r^n - r^{n+1}\to 0$ のはずであるが、

$$\left|r^n - r^{n+1}\right| = |r^n(1-r)| = |r|^n|1-r| = 1^n|1-r| = |1-r| > 0.$$

この値は n によらない正の定数であるから矛盾する。ゆえに収束しない。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2021/complex2021.pdf (2014～).