複素関数・同演習 第7回

～ Cauchy-Riemann 方程式 (2) ～

かつらだ まさし
桂田 祐史
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/

2021年10月12日

目次

本日の内容・連絡事項

- Cauchy-Riemann 方程式の続き (講義ノート [1] の §2.5 の後半) を解説する。正則関数と調和関数との関係、等角性、逆関数定理など、単なる計算にとどまらない重要な話 (ちょっと高級) がたくさんある。
- 今日は宿題 4 を出す (締め切りは 10 月 19 日 (火曜) 13:30)。
- 今日は問 2 の解説をして、問 3 の解説は次回 (明日) の複素関数演習で行う。その後の宿題の解説は、翌週の「複素関数」で行う、を原則とする。
- 活動制限指針レベル 1 になったので対面授業を行う (複素関数演習はオンラインのままである)。出欠は Oh-o! Meiji の出欠管理システムを用いる (ワンタイムパスワードを用いる。今日は `ajgyw`)。対面で受けることは強制しない。授業は Zoom で配信するので (参加法は「シラバスの補足」に掲載)、体調がすぐれないなど不安がある場合は、Zoom で参加するか、これまで通りオンデマンド資料を視聴すること (動画資料公開は授業のあった日の夕方となる)。

2.5.2 正則関数が定数となる場合 (続き)

次の定理の (1) は前回証明が済んでいる。

定理 6.11 (正則関数の実部・虚部・絶対値のいずれかが定数ならば定数関数)

Ω は $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とする。

1. f の実部または虚部が定数関数ならば、f 自身が定数関数である。特に実数値または純虚数値の正則関数は定数関数しかない。
2. $|f|$ が定数関数ならば、f 自身が定数関数である。

証明

2. $|f| = C$ (C は定数) とおく。$C = 0$ であれば $f = 0$ (in Ω) であるから、f は定数関数である。以下 $C \neq 0$ とする。$C^2 = |f|^2 = u^2 + v^2$ を微分して
$$2uu_x + 2vv_x = 0, \quad 2uu_y + 2vv_y = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$
Cauchy-Riemann 方程式を代入して (v_x, v_y を消去して)
$$uu_x - vu_y = 0, \quad uu_y + vu_x = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

(次のスライドに続く)

証明 (続き)

すなわち
$$\begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

任意の $(x, y) \in \widetilde{\Omega}$ において、$u^2 + v^2 = C^2 > 0$ であるから、$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. ゆえに行列は特異であるから (もし正則であれば、逆行列を左からかけて矛盾が生じる)
$$u_x^2 + u_y^2 = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

これから $u_x = u_y = 0$ (in $\widetilde{\Omega}$). 補題 6.10 より、u は $\widetilde{\Omega}$ で定数関数である。ゆえに、すでに証明した (1) より f は $\widetilde{\Omega}$ で定数関数である。 □

2.5.3 正則関数と調和関数

$\mathbb{R}^n$ の開集合 Ω で定義された関数 $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が

(1)
$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

を満たすとき、u は**調和関数** (harmonic function) であるという。また (1) を **Laplace 方程式** (Laplace equation) とよぶ。非常に重要な偏微分方程式である。

(2)
$$\triangle := \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

で定義される微分作用素 $\triangle$ を **Laplace 作用素** (Laplace operator, Laplacian) とよぶ。これを用いると (1) は

(3)
$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

と表せる。

(ベクトル解析の既習者向け) $\triangle$ のことを ∇^2 とも書く ($\triangle u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \nabla \cdot (\nabla u)$ だから)。

2.5.3 正則関数と調和関数

次は非常に有名で重要な結果である。

定理 7.1 (正則関数の実部虚部は調和関数である)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とするとき、f の実部・虚部 u, v は

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \left(\text{in } \widetilde{\Omega} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + iy \in \Omega\right\}\right)$$

を満たす。すなわち u と v は調和関数である

証明　後で f が正則ならば、f は何回でも微分可能であるという定理を証明する。先走ってそれを認めると、u と v は C^∞ 級である。

Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つので、

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

最後の等号が成り立つのは、v が C^2 級であることによる (v の 2 階偏導関数は偏微分の順序によらない)。

同様にして $v_{xx} + v_{yy} = 0$ も証明できる。 □

2.5.3 正則関数と調和関数

上の定理は「正則関数の実部と虚部は調和関数である」と手短に述べられる。$\mathbb{R}^2$ の開集合で定義された 2 つの調和関数 u, v が Cauchy-Riemann 方程式

$$u_x = v_y \quad \text{かつ} \quad u_y = -v_x$$

を満たすとき、v を u の**共役調和関数** (conjugate harmonic function of u) とよぶ。「正則関数の虚部は実部の共役調和関数である」ということになる。

注意 7.2 (ときどきある勘違いを注意しておく)

v が u の共役調和関数であるとき、u は v の共役調和関数であるとは限らない。実際、u が v の調和関数であるとは

$$v_x = u_y \quad \text{かつ} \quad v_y = -u_x$$

が成り立つことを意味するが、v が u の共役調和関数であれば

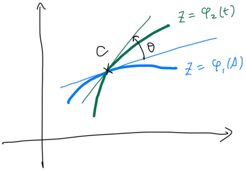
$$u_x = v_y \quad \text{かつ} \quad u_y = -v_x$$

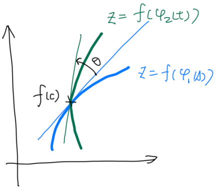
が成り立つので、$u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ が導かれ、u と v は定数関数となる。

(**蛇足**　w が z の共役複素数であるとき、z は w の共役複素数である ($w = \overline{z} \Rightarrow z = \overline{w}$)。それと同じように勘違いしないこと。)

2.5.4 等角性

正則関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は、$f'(c) \neq 0$ であれば、c で交わる任意の 2 曲線を $f'(c)$ で交わる 2 曲線に写し、その交角を変えないという性質 (等角性) を持つ。





理由の説明 (ていねい化すると証明になる) Ω 内の曲線 $z = \varphi(t)$ $(t \in I)$ を関数 $w = f(z)$ $(z \in \Omega)$ でうつすと、曲線 $w = f(\varphi(t))$ $(t \in I)$ が得られる。

$$c = \varphi(t_0), \quad t_0 \in I, \quad f'(c) = \rho e^{i\phi} \quad (\rho > 0,\ \phi \in \mathbb{R})$$

とする。

- 曲線 φ の c における接ベクトルは $\varphi'(t_0)$ (の定数倍).
- 曲線 $f \circ \varphi$ の $f(c)$ における接ベクトルは

$$\frac{d}{dt}(f(\varphi(t)))\bigg|_{t=t_0} = f'(\varphi(t_0))\varphi'(t_0) = f'(c)\varphi'(t_0) = \rho e^{i\phi}\varphi'(t_0) \quad (\text{の定数倍}).$$

$\cdots$ ゆえに曲線によらない (f だけで定まる) 共通の角度 ϕ だけ偏角が変化する。

2.5.4 等角性

一般に、定義域 Ω 全体で $f' \neq 0$ を満たす正則関数 f を**等角写像** (conformal mapping) と呼ぶ。

等角写像が等角性を持つことが、複素関数の範疇で説明ができたけれど、対応する実多変数関数で表して調べてみる。

$$\boldsymbol{f}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \operatorname{Re} c \\ \operatorname{Im} c \end{pmatrix}$$

とおくと、$\boldsymbol{f}\colon \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}^2$, さらに

$$f \text{ が } c \text{ で微分可能} \Leftrightarrow \boldsymbol{f} \text{ が } \boldsymbol{c} \text{ で微分可能で } (\exists p,q \in \mathbb{R})\ \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}.$$

なぜならば、$\boldsymbol{f}'(x,y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ で、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つから。ゆえに

$$\det \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = |f'(c)|^2 \quad (= p^2 + q^2). \tag{4}$$

($f'(c) = p + qi$ となることを思い出そう。(4) はそれ自体重要な公式。)

2.5.4 等角性

$f'(c) = p + qi \neq 0$ を仮定して、$f'(c)$ の偏角を ϕ とすると

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} = \sqrt{p^2+q^2}\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \quad (\text{回転と拡大}).$$

ゆえに

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}) \fallingdotseq \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c})\boldsymbol{h}$$

の右辺は、$\boldsymbol{h}$ を角度 ϕ だけ回転して長さを $\sqrt{p^2+q^2}$ したものである。

一般に、$ad - bc \neq 0$ を満たす $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ に対して、1 次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

は、正方形を平行四辺形に写す (歪みが生じ、角度が保存されないこともある) が、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の形の 1 次変換は正方形を正方形に写す (歪まず、角度は保存される)。

以上のように考えても、等角性が成り立つことが分かる。

2.5.5 逆関数定理

定理 7.3 (正則関数の逆関数定理 (弱い形))

f が正則で、f' が連続かつ $f'(c) \neq 0$ であれば、c の十分小さな開近傍 (c を含む開集合) で正則な逆関数が存在する。

略証　微積分に「逆関数定理」がある。$\boldsymbol{f}$ が C^1 級で、$\det \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) \neq 0$ ならば、$\boldsymbol{c}$ を含む十分小さな開集合 $\widetilde{U}$ では $\boldsymbol{f}$ は単射で、$\boldsymbol{f}$ を $\widetilde{U}$ に制限した写像

$$\boldsymbol{f}|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{f}(\widetilde{U})$$

の C^1 級の逆写像が存在する、という内容である。その定理は認めることにする。

$f'(c) \neq 0$ を満たす正則関数 f に対応する $\boldsymbol{f}$ については (c に十分近い任意の $\widetilde{c}$ に対して、$f'(\widetilde{c}) = p + iq$ ($p, q \in \mathbb{R}$) とおいて)

$$\det \boldsymbol{f}'(\widetilde{\boldsymbol{c}}) = \left|f'(\widetilde{c})\right|^2 \neq 0, \quad \left(\boldsymbol{f}'(\widetilde{\boldsymbol{c}})\right)^{-1} = \frac{1}{p^2+q^2}\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}.$$

ゆえに、対応する f の局所的逆関数 $\left(f|_U\right)^{-1}$ は、Cauchy-Riemann 方程式を満たす。ゆえに $\left(f|_U\right)^{-1}$ は正則関数である。 □

注　後で「f が正則ならば、f は無限回微分可能」という定理を証明するので、定理の仮定に「f' が連続」を書く必要はなくなる (弱くない逆関数定理が得られる)。

宿題 (問 4) について

とある年度の期末試験で、複素関数 $\dfrac{1}{z}$ の原始関数を $\log|z|$ とする人がかなりの数出現した。現時点 (というより先週の段階？) で間違いであることが難しくなく理解できる (はずなのに)。

宿題のネタにすると良いかもしれない (覚えてくれそう)、と考えて次の問題を出題する。

問題　$f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ を $f(z)=\log|z|$ $(z\in\mathbb{C}\setminus\{0\})$ で定める。ただし、$\log\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R}$ は、微積分に現われる (高校生も知っている) 実関数である。f はいたるところで微分出来ないことを示せ。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2021/complex2021.pdf (2014〜).