複素関数・同演習 第6回

～複素関数の微分、正則性、Cauchy-Riemann 方程式～

桂田 祐史（かつらだ まさし）
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/

2021年10月6日

目次

本日の内容・連絡事項

- 講義ノート [1] の §2.4, 2.5 を解説する。
  §2.4 は「〜と同様」ばかりで少しユルい話である (一度真剣に聴けばそれで済むだろう)。
  §2.5 の Cauchy-Riemann 方程式はいよいよ複素関数の本論に突入。目を覚まして聴いて下さい。§2.5 は少し長めの話になります。
- 宿題 3 を出します (締め切りは 10 月 13 日 10:50 — 変更しました)。「複素関数演習」のレポートを見て下さい。今回から翌週解説するので、原則提出の遅延は認めません。
- (この情報は繰り返し) Zoom オフィスアワーを (とりあえず) 火曜 12:00–13:00 に設けます。参加するための情報は「シラバスの補足」に書いておきました。
- 明治大学は来週から、活動制限指針レベル 1 となる予定です。この科目は活動制限指針レベル 1 以上でオンライン講義をすることになっているので、特に変更点はありません。一方、「複素関数」の方は対面授業となります。

定義 6.1 (微分可能, 正則)

簡単のため、Ω は $\mathbb{C}$ の開集合とし、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $c \in \Omega$ とする。f が c で**微分可能** (differentiable) であるとは、極限

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

が存在することをいう。このときこの極限を $f'(c)$ と表し、f の c における**微分係数** (the derivative of f at c) と呼ぶ。**導関数** (derivative, derived function) などの言葉の使い方は、実関数のときと同様に定義する。

Ω の任意の点 z に対して、f が z で微分可能であるとき、f は Ω で**正則** (regular, 整型, holomorphic) であるという。

2.4.2 例

例 6.2 (正則な関数の例)

$f(z) = \gamma$ (定数関数) と $g(z) = z$ は、$\mathbb{C}$ 全体で定義されて正則である。

実際、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma - \gamma}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

であるから、f は z で微分可能で $f'(z) = 0$. f は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。

また

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{z + h - z}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

であるから、g は z で微分可能で $g'(z) = 1$. g は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。

2.4.3 微分可能な関数の和・差・積・商

命題 6.3 (微分可能な関数の和・差・積・商)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$c \in \Omega$ とする。$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ と $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ が c で微分可能ならば、$f+g$, $f-g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ (ただし $g(c) \neq 0$ とする) も c で微分可能であり、

$$\begin{aligned}
(f+g)'(c) &= f'(c) + g'(c),\\
(f-g)'(c) &= f'(c) - g'(c),\\
(fg)'(c) &= f'(c)g(c) + f(c)g'(c),\\
\left(\frac{f}{g}\right)'(c) &= \frac{g(c)f'(c) - g'(c)f(c)}{g(c)^2}.
\end{aligned}$$

証明.

実関数の場合と同様である。 □

系 6.4 (多項式と有理関数の正則性)

1. 任意の自然数 k に対して、$f(z)=z^k$ は $\mathbb{C}$ で正則で、$f'(z)=kz^{k-1}$.
2. 任意の複素係数多項式の定める関数は $\mathbb{C}$ 上で正則である。

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} z^j.$$

(2 つめの等式がすらすら導けるように。「$k-1=j$ とおくと…」)

3. 任意の複素係数有理式 $r(z)=\dfrac{q(z)}{p(z)}$ $(p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $p(z)$ は零多項式ではない$)$ の定める関数 $r\colon \Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid p(z) \neq 0\} \ni z \mapsto r(z) \in \mathbb{C}$ は正則である。

2.4.5 合成関数の微分法と逆関数の微分法

合成関数の微分法　f と g が合成可能で、f が c で、g が $f(c)$ で微分可能ならば、$g\circ f$ は c で微分可能で

$$(g\circ f)'(c)=g'(f(c))f'(c). \tag{1}$$

あるいは $w=f(z)$, $\zeta=g(w)$ とするとき、合成関数 $\zeta=g(f(z))$ について

$$\frac{d\zeta}{dz}=\frac{d\zeta}{dw}\frac{dw}{dz}. \tag{2}$$

逆関数の微分法

$$\frac{dz}{dw}=\frac{1}{\dfrac{dw}{dz}} \quad (\text{ただし } dw/dz\neq 0 \text{ とする}) \tag{3}$$

も成り立つ (逆関数定理が重要だが、それは §2.5.5 で説明する)。

定理 6.5 (複素関数が微分可能 ⇔ 実部・虚部が微分可能かつ Cauchy-Riemann 方程式)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $c = a + bi \in \Omega$ $(a, b \in \mathbb{R})$ とする。f が c で微分可能であるためには、f の実部 u と虚部 v が (a, b) で (全) 微分可能でかつ

$$(\star) \qquad u_x(a, b) = v_y(a, b), \quad u_y(a, b) = -v_x(a, b)$$

を満たすことが必要十分である。

$(\star)$ を **Cauchy-Riemann の方程式** (the Cauchy-Riemann equations, the Cauchy-Riemann relations) と呼ぶ。

(復習) f の実部 u, 虚部 v は、$u\colon \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$, $v\colon \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$,

$$u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + yi), \quad v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + yi) \quad ((x, y) \in \widetilde{\Omega})$$

で定義される関数である。ただし

$$\widetilde{\Omega} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + yi \in \Omega \right\}.$$

例 6.6 (正則関数が Cauchy-Riemann 方程式を満たすことを見る)

正則な $f(z) = z^2$ $(z \in \mathbb{C})$, $f(z) = \dfrac{1}{z}$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$, $f(z) = e^z$ $(z \in \mathbb{C})$ などが、Cauchy-Riemann 方程式を満たすこと確かめてみよう。

例 6.7 (微分可能でないことの証明に使ってみる)

$f(z) = \mathrm{Re}\, z$, $f(z) = \mathrm{Im}\, z$, $f(z) = |z|$, $f(z) = \mathrm{Arg}\, z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$, $f(z) = \overline{z}$ はいたるところ微分可能でない。これらは微分可能性の定義に戻って証明することも出来るが、上の定理を用いるのも簡単である。

$f(z) = |z|$ の場合に証明してみよう。
実部 $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, 虚部 $v(x,y) = 0$ である。

(a) $(x,y) \neq (0,0)$ のとき、$u_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $u_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $v_x = 0$, $v_y = 0$ である。$x \neq 0$ のとき $u_x \neq 0 = v_y$, $y \neq 0$ のとき $u_y \neq 0 = -v_x$. ゆえに任意の点で Cauchy-Riemann 方程式は成り立たない。

(b) $(x,y) = (0,0)$ のとき、u は偏微分可能でないので、(全) 微分可能でもない。

(a), (b) より、任意の点 (x,y) において、「u と v は (全) 微分可能で、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つ」という条件は満たさない。ゆえに f は微分可能でない。 □

定理 6.5 の証明前に、微分可能性から Cauchy-Riemann 方程式を導く簡潔な方法を紹介する。

f が $c = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ で微分可能ならば、u と v は (a, b) で偏微分可能で、

$$(\sharp) \qquad f'(c) = u_x(a, b) + iv_x(a, b) = \frac{1}{i}\left(u_y(a, b) + iv_y(a, b)\right)$$

が成り立つ。特に実部・虚部を比較して $u_x(a, b) = v_y(a, b)$, $u_y(a, b) = -v_x(a, b)$. ($(\sharp)$ を $f' = f_x = \dfrac{1}{i} f_y$ と書く人もいる。記号の濫用だが[1]分かりやすいかも。)

証明　f が c で微分可能とは、

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

が存在することであるが、$h = h_x + ih_y$ $(h_x, h_y \in \mathbb{R})$ の動く範囲を次の二通りに制限した場合を考える。

(次のスライドに続く)

[1] うるさく言うと、f は変数 z の複素関数であって、変数 x, y の関数ではないので、f_x, f_y という書き方は変である。

(a) $h_y = 0$ のとき (水平移動)、すなわち $h = h_x$ ($h_x \in \mathbb{R}$) (実数の値だけを取る) $f(c+h_x) = u(a+h_x, b) + iv(a+h_x, b)$ に注意すると、

$$f'(c) = \lim_{\substack{h_x \to 0 \\ h_x \in \mathbb{R}}} \frac{f(c+h_x) - f(c)}{h_x} = \lim_{h_x \to 0} \frac{(u(a+h_x, b) + iv(a+h_x, b)) - (u(a,b) + iv(a,b))}{h_x}$$

$$= \lim_{h_x \to 0} \left(\frac{u(a+h_x, b) - u(a,b)}{h_x} + i \frac{v(a+h_x, b) - v(a,b)}{h_x} \right) = u_x(a,b) + iv_x(a,b).$$

(b) $h_x = 0$ のとき (垂直移動)、すなわち $h = ih_y$ ($h_y \in \mathbb{R}$) (純虚数の値だけを取る) $f(c+ih_y) = u(a, b+h_y) + iv(a, b+h_y)$ に注意すると、

$$f'(c) = \lim_{\substack{h_y \to 0 \\ h_y \in \mathbb{R}}} \frac{f(c+ih_y) - f(c)}{ih_y} = \lim_{h_y \to 0} \frac{(u(a, b+h_y) + iv(a, b+h_y)) - (u(a,b) + iv(a,b))}{ih_y}$$

$$= \frac{1}{i} \lim_{h_y \to 0} \left(\frac{u(a, b+h_y) - u(a,b)}{h_y} + i \frac{v(a, b+h_y) - v(a,b)}{h_y} \right) = \frac{1}{i} \left(u_y(a,b) + iv_y(a,b) \right)$$

以上から

$$f'(c) = u_x(a,b) + iv_x(a,b) = \frac{1}{i} \left[u_y(a,b) + iv_y(a,b) \right] = v_y(a,b) - iu_y(a,b).$$

実部・虚部を比較して、

$$u_x(a,b) = v_y(a,b), \quad v_x(a,b) = -iu_y(a,b). \quad \square$$

定理 6.5 の証明

f が c で微分可能であるとは

$$(\exists p, q \in \mathbb{R}) \quad \lim_{h\to 0}\left|\frac{f(c+h)-f(c)}{h}-(p+iq)\right| = 0$$

が成り立つことを意味する。方針: u, v, p, q で表す。
$h = h_x + ih_y$ $(h_x, h_y \in \mathbb{R})$ とおくと

$$f(c+h)-f(c) = u(a+h_x, b+h_y) - u(a,b) + i\left(v(a+h_x, b+h_y) - v(a,b)\right),$$
$$(p+iq)h = (p+iq)(h_x+ih_y) = (ph_x - qh_y) + i(qh_x + ph_y)$$

であるから

$$\left|\frac{f(c+h)-f(c)}{h}-(p+iq)\right|$$
$$= \frac{|f(c+h)-f(c)-(p+iq)h|}{|h|}$$
$$= \left|\frac{u(a+h_x, b+h_y)-u(a,b)-(ph_x-qh_y)}{\sqrt{h_x^2+h_y^2}} + i\frac{v(a+h_x, b+h_y)-v(a,b)-(qh_x+ph_y)}{\sqrt{h_x^2+h_y^2}}\right|.$$

ゆえに

f が c で微分可能

$$\Leftrightarrow (\exists p, q \in \mathbb{R}) \lim_{(h_x, h_y)\to(0,0)} \frac{u(a+h_x, b+h_y) - u(a,b) - (ph_x - qh_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = 0$$

$$\text{かつ} \lim_{(h_x, h_y)\to(0,0)} \frac{v(a+h_x, b+h_y) - v(a,b) - (qh_x + ph_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\exists p, q \in \mathbb{R}) \quad u \text{ と } v \text{ は } (a,b) \text{ で (全) 微分可能で}$$
$$u_x(a,b) = p,\ u_y(a,b) = -q,\ v_x(a,b) = q,\ v_y(a,b) = p$$

$$\Leftrightarrow u \text{ と } v \text{ は } (a,b) \text{ で (全) 微分可能で } u_x(a,b) = v_y(a,b), \quad u_y(a,b) = -v_x(a,b). \qquad \square$$

2.5.2 正則関数が定数となる場合

有名な定理 6.11 (正則関数で、その実部、虚部、絶対値のいずれかが定数関数であるものは定数関数である) を紹介する。

これを使うと、$\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $|z|$, $\mathrm{Arg}\, z$ が正則関数でないことがすぐに分かる (いずれも実数値なので虚部が定数関数 0)。

そのための準備をする。次の問を考えてみよう。

問 $f' = 0$ ならば f は定数関数か？

答 無条件では f が定数とは言えない。

まず 1 実変数関数、つまり $I \subset \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ のときを調べよう。

「$f' = 0$ ならば f は定数関数」は偽である。

反例: $I = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

もしも I が区間ならば、f は I で定数である (平均値の定理で証明できる)。定義域が何であるかも重要である。

多変数の場合も、同様のことをしたければ、**(弧) 連結性**の概念が必要になる。

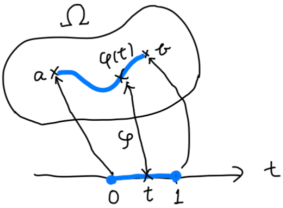
2.5.2 正則関数が定数となる場合

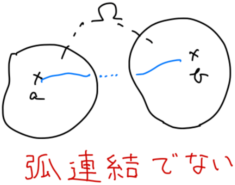
定義 6.8 (弧連結, 領域)

$\Omega \subset \mathbb{R}^\ell$ (あるいは $\Omega \subset \mathbb{C}$) が**弧連結** (pathwise-connected, arcwise-connected) とは、Ω 内の任意の 2 点が Ω 内の曲線で結べることをいう。

(すなわち、Ω の任意の 2 点 a, b に対して、連続関数 $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ で、$\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$ を満たすものが存在するとき、Ω は弧連結であるという。)

弧連結な開集合を**領域** (region) と呼ぶ。





直観的には、平面図形 Ω が弧連結であるとは、Ω が 1 つの島からなる国であることである。2 つ以上の島からなる国は弧連結ではないが、個々の島のことを**弧連結成分**と呼ぶ。

注意 6.9 (上の定義は実は普通でない)

普通は (「弧連結」でない) 「連結」という言葉を定義して、連結な開集合のことを領域と定義する。

- 「連結」はやや分かりにくい。「弧連結」は直観的で分かりやすい。
- $\mathbb{R}^\ell$ の開集合について「連結」と「弧連結」は同値なので、「領域とは、弧連結な開集合のこと」としても領域の意味には変わりがない。

という二つの理由から、上のように定義することにした。 □

$\mathbb{R}$ の部分集合 I について、I が区間 $\Leftrightarrow$ I は弧連結。

問 このことを証明せよ (ヒント: 中間値の定理)。

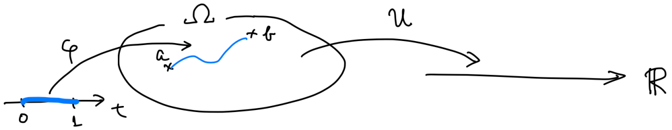
Ω が弧連結な開集合 (領域) のとき、Ω の任意の 2 点は C^1 級の曲線で結べる。つまり上の定義の φ として、単に連続であるだけでなく、C^1 級であるものが取れる。以下では、これを認めて議論する (証明は省略する。講義ノート [1] の付録 B に書いてある。)。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

次の補題は微積分でも学んだことがあるだろう。

補題 6.10 (領域で導関数が 0 に等しい関数は定数関数である)

Ω は $\mathbb{R}^n$ の領域、$u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が (全) 微分可能で、$u' = 0$ を満たすならば、u は Ω 全体で定数関数に等しい。



証明　任意の $a, b \in \Omega$ に対して、ある $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ が存在して、φ は C^1 級かつ $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$.
このとき、$F(t) := u(\varphi(t))$ $(t \in [0,1])$ とおくと

$$F'(t) = u'(\varphi(t))\varphi'(t) = 0 \cdot \varphi'(t) = 0.$$

ゆえに F は定数関数である。特に $F(0) = F(1)$. ゆえに $u(a) = u(b)$.
(実際 $u(a) = u(\varphi(0)) = F(0) = F(1) = u(\varphi(1)) = u(b)$.)
以上より u は Ω 全体で定数関数である。 □

2.5.2 正則関数が定数となる場合

次の定理は多くの関数論のテキストに載っている。

定理 6.11 (正則関数の実部・虚部・絶対値のいずれかが定数ならば定数関数)

Ω は $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とする。

1. f の実部または虚部が定数関数ならば、f 自身が定数関数である。特に実数値または純虚数値の正則関数は定数関数しかない。
2. $|f|$ が定数関数ならば、f 自身が定数関数である。

証明　$\widetilde{\Omega} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + yi \in \Omega\right\}$ とおく。

1. 実部が定数関数の場合を証明する。f の実部、虚部をそれぞれ u, v とするとき、仮定から $u = C$ (定数) であるから、$u_x = u_y = 0$ in $\widetilde{\Omega}$. Cauchy-Riemann の方程式

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

が成り立つので、$v_x = -u_y = 0$, $v_y = u_x = 0$ in $\widetilde{\Omega}$. 補題 6.10 より、v は定数関数である。ゆえに $f = u + iv$ も定数関数である。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

(2) $|f| = C$ (C は定数) とおく。$C = 0$ であれば $f = 0$ (in Ω) であるから、f は定数関数である。以下 $C \neq 0$ とする。$|f|^2 = C^2 = u^2 + v^2$ を微分して、

$$2uu_x + 2vv_x = 0, \quad 2uu_y + 2vv_y = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

Cauchy-Riemann 方程式を代入して (v_x, v_y を消去して)

$$uu_x - vu_y = 0, \quad uu_y + vu_x = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

任意の $(x, y) \in \widetilde{\Omega}$ において、$u^2 + v^2 = C^2 > 0$ であるから、$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. ゆえに行列は特異であるから (もし正則であれば、逆行列を左からかけて矛盾が生じる)

$$u_x^2 + u_y^2 = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

これから $u_x = u_y = 0$ (in $\widetilde{\Omega}$). 補題 6.10 より、u は $\widetilde{\Omega}$ で定数関数である。(1) より f は $\widetilde{\Omega}$ で定数関数である。 □

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2021/complex2021.pdf (2014〜).