複素関数・同演習 第5回

～n 乗根 (補足), 複素関数の極限・連続性～

かつらだ まさし
桂田 祐史
http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/

2021年10月5日

目次

本日の内容・連絡事項

- 本日は、n 乗根について前回の残りと、講義ノート [1] の §1.12, 2.1, 2.2, 2.3 を解説する。多変数関数の極限・連続性の話 (「数学解析」で解説した) の見かけを変えただけと考えることができる。
- Zoom オフィスアワーを火曜 12:00–13:00 に設ける。参加するための情報は「シラバスの補足」に書いておいた。
- 今日は宿題 1 の解説をする。(今後、毎週「複素関数」で宿題の解説をする。来週は宿題 2,3 の解説をする予定。)
- 宿題 3 を出します (締め切りは 10 月 12 日 13:30)。「複素関数演習」のレポートとして提出して下さい。
  (「複素関数演習」を理由していない人は、授業 WWW サイト `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/` にある課題文 PDF を見て、Meiji Mail を使って `katurada` あっと `meiji` どっと `ac` ドット `jp` 宛にメールで提出すること。)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ とする。0 の n 乗根は 0 のみ。

$c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$ とする。c の n 乗根は全部で n 個存在し、極形式で表せる。(だから、実逆三角関数&実三角関数を使えば、$x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ の形に表せる。)

平方根 ($n = 2$ のとき) は、逆三角・三角関数を使わずに、$\sqrt{\text{正の数}}$ で表せる。

— 以上は説明済み。

立方根 ($n = 3$ のとき) は、$\sqrt[3]{\text{実数}}$ を使って表せないことがある。実際、$c = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ として $(x + yi)^3 = a + bi$ を解こうとすると、行き詰まる。

1.11.5 補足 $\sqrt[n]{c}$ という記号について

(混乱する人がいるかもしれないので、1 枚にまとめてみる。)

$c \in \mathbb{R}$ の場合は、記号 $\sqrt[n]{c}$ について、多くの人が認めるルールがある。

- n が奇数のとき、任意の実数 c に対して $x^n = c$ を満たす実数 x がただ一つ存在する。それを $\sqrt[n]{c}$ で表す。
- n が偶数のとき、任意の $c \geq 0$ に対して、$x^n = c$ を満たす実数 $x \geq 0$ がただ一つ存在する。それを $\sqrt[n]{c}$ で表す。

  $c < 0$ のときは？$n = 2$ のとき $\sqrt[n]{c} = \sqrt{c} = \sqrt{-c}i$ とするのが、高校数学のルールであったが、この講義では $\sqrt[n]{c}$ の一般的定義はしないことにする ($n = 2$ のときの真似 (？) をして、$\sqrt[n]{|c|}e^{i\pi/n}$ と定義する手はあるが$\cdots$)。

c が虚数のとき、$\sqrt[n]{c}$ が、c の n 個の n 乗根のうちどれを表すか決めるための、一般的に使える良いルールがない。だからこの講義では無理にルールは決めないことにする。後で $w = \sqrt[n]{z}$ という関数の話をするので、そのときもう一度取り上げる。$\sqrt[n]{c}$ を使うときは、その都度適当なルールを選ぶこと。

2 次方程式の解の公式を使う場合、($\pm\sqrt{D}$ の形なので) どのルールでも問題ない。

1.11.5 補足 $\sqrt[n]{c}$ という記号について

(このスライドの話は細かいので、スルーしても良い。前のスライドで、$\sqrt[n]{c}$ の定義についてうるさいことを言っているけれど必要があるの？、という人は読んで下さい。)

具体的な問題として、3 次方程式 $x^3+px+q=0$ に対する Cardano の公式

$$(1)\qquad x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}},\quad \Delta:=-\left(27q^2+4p^3\right)$$

を取り上げる。簡単のため、まず $p,\ q\in\mathbb{R}$ の場合を考える。

$\Delta\le 0$ の場合は、$\sqrt{\text{非負実数}}$ と $\sqrt[3]{\text{実数}}$ しか出て来ない。前のスライドに書いたルールで解釈して問題がない (ことが分かる)。

$\Delta>0$ の場合は、$\sqrt{\text{負の実数}}$ と $\sqrt[3]{\text{虚数}}$ が現れて、その値をどう選択するか問題となる。(1) に 2 つある $\sqrt[3]{\ }$ の値は、$\sqrt[3]{\ }\sqrt[3]{\ }=-\frac{p}{3}$ を満たすように選ばないと、x は 3 次方程式の解にならない。それを考えると、(1) はむしろ

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}+\frac{-p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}}$$

と書く方がいいのかもしれない (もちろん $\sqrt[3]{\ }=\sqrt[3]{\ }$ とする)。

$p,\ q$ が虚数の場合も、$\sqrt[3]{\ }$ の値の選択をきちんとすれば、(1) の x は解となる。

1.12 $\mathbb{C}$ の距離、複素数列の収束

一言でまとめると: $\mathbb{R}^2$ **と同じ**。複素数列の収束は $\mathbb{R}^2$ の点列の収束と同じで、実部・虚部の作る数列の収束と同じ。$\mathbb{R}^2$ については「知っている」ことになっているので、$\mathbb{C}$ についても「同様に分かる」ことにする。

任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して、$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ となる x, y を取って、$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと、$\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^2$ であり

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |\boldsymbol{z}|.$$

これから、$\mathbb{C}$ における 2 点の距離と、$\mathbb{R}^2$ における対応する 2 点の距離は等しい:

$$|z_1 - z_2| = |\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2|.$$

$\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2$ は距離まで込めて対応している。

複素数列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $c \in \mathbb{C}$ に対して、

$$x_n := \operatorname{Re} z_n,\ y_n := \operatorname{Im} z_n,\ \boldsymbol{z_n} := \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},\ a := \operatorname{Re} c,\ b := \operatorname{Im} c,\ \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

とおくと、$\{\boldsymbol{z}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^2$ の点列, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^2$ であり、

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to\infty} |z_n - c| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |\boldsymbol{z}_n - \boldsymbol{c}| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{z}_n = \boldsymbol{c}$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a \wedge \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

いよいよ複素関数を調べ始めよう。

定義 5.1 (複素関数の実部・虚部)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ とする。関数 $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ に対して、f の**実部** u, **虚部** v を

$$u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+yi), \quad v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+yi) \quad ((x,y) \in \widetilde{\Omega}). \tag{2}$$

で定める。ただし

$$\widetilde{\Omega} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x+yi \in \Omega\right\}. \tag{3}$$

$u \colon \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$, $v \colon \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ である。(メモ: 面倒がらずに $\widetilde{\Omega}$ は図を描いて説明すること。)

こうして実部・虚部に分解してしまえば、極限と連続性については、実 2 変数の関数のそれと同じである (数学解析を復習すると良い。桂田 [2] を見よ。)。

例 5.2

1. $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ とするとき ($\Omega = \mathbb{C}$, $\widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^2$)

$$f(x+yi) = (x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

ゆえに

$$u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy.$$

2. $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{1}{z}$ とするとき ($\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$)

$$f(x+yi) = \frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)} = \frac{x-yi}{x^2+y^2}.$$

ゆえに

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

例 5.2 (つづき)

3. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ とするとき

$$f(x+yi) = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x\cos y + ie^x\sin y.$$

ゆえに

$$u(x,y) = e^x\cos y, \quad v(x,y) = e^x\sin y.$$

2.2 良く使う記号・用語 (極限に向けて)

$\mathbb{R}^2$ の場合と本質的に同じである。記号が少し違うくらい (数学解析では、a 中心, 半径 r の開円盤は $B(a;r)$ と書いた)。

1. $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ に対して
$$D(c,r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < r\}.$$
c を中心とする半径 r の**開円盤** (an open disk, 開円板) とよぶ。
2. $\Omega \subset \mathbb{C}$ に対して
$$\overline{\Omega} := \{z \in \mathbb{C} \mid (\forall \varepsilon > 0) D(z;\varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset\}$$
とおき、Ω の**閉包** (the closure of Ω) とよぶ。
3. $\Omega \subset \mathbb{C}$ に対して
   - Ω が $\mathbb{C}$ **の開集合** (open set) とは、
   $$(\forall z \in \Omega)(\exists \varepsilon > 0) \quad D(z;\varepsilon) \subset \Omega$$
   が成り立つことをいう。
   - Ω が $\mathbb{C}$ **の閉集合** (closed set) とは、Ω の補集合 $\Omega^{\complement} = \{z \in \mathbb{C} \mid z \notin \Omega\}$ が $\mathbb{C}$ の開集合であることをいう。

定義 5.3 (複素関数の極限、連続性)

$\Omega \subset \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ とする。

1. $c \in \overline{\Omega}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ とする。$z \to c$ のとき $f(z)$ が γ に**収束する**とは

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega : |z - c| < \delta) \quad |f(z) - \gamma| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。このことを $f(z) \to \gamma$ と表す。
(このような γ は存在すれば一意的なので) γ を $f(z)$ の $z \to c$ のときの**極限**とよび、$\displaystyle\lim_{z \to c} f(z)$ で表す。

注意　$z \to c$ のとき $f(z) \to \gamma$ を

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega : 0 < |z - c| < \delta) \quad |f(z) - \gamma| < \varepsilon$$

が成り立つことと定義している本が多い。この講義では、杉浦 [3] の定義に従う。

定義 5.3 (複素関数の極限、連続性 (つづき))

$\Omega \subset \mathbb{C}$, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ とする。

2. $c \in \Omega$ とする。f が c で**連続**であるとは
$$\lim_{z \to c} f(z) = f(c)$$
が成り立つことをいう。ε-δ 論法で表すと
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega : |z - c| < \delta) \quad |f(z) - f(c)| < \varepsilon.$$
3. f が Ω で**連続**とは、f が任意の点 $c \in \Omega$ で連続なことをいう。

2.3.2 実関数の極限・連続性への翻訳

複素関数の極限・連続性は、実部・虚部の極限・連続性に翻訳できる。

$$x := \operatorname{Re} z, \quad y := \operatorname{Im} z, \quad \boldsymbol{z} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\alpha := \operatorname{Re} \gamma, \quad \beta := \operatorname{Im} \gamma, \quad \boldsymbol{\gamma} := \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

$$a := \operatorname{Re} c, \quad b := \operatorname{Im} c, \quad \boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+yi), \quad v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+yi), \quad \boldsymbol{f}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\lim_{z\to c} f(z) = \gamma \Leftrightarrow \lim_{\boldsymbol{z}\to\boldsymbol{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{\gamma} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y) = \alpha \\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} v(x,y) = \beta. \end{cases}$$

ゆえに

f が c で連続 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{c}$ で連続 $\Leftrightarrow$ u と v が (a,b) で連続.

「c で」を「Ω で」、「$\boldsymbol{c}$ で」と「(a,b) で」を「$\widetilde{\Omega}$ で」に変えても成立する。ただし、$\widetilde{\Omega} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + yi \in \Omega\right\}$.

2.3.2 実関数の極限・連続性への翻訳

例 5.4

指数関数 $f(z) = e^z$ については、実部 $u(x, y) = e^x \cos y$, 虚部 $v(x, y) = e^x \sin y$ が $\mathbb{R}^2$ で連続である。ゆえに f は $\mathbb{C}$ で連続である。

2.3.3 複素関数の和・差・積・商の極限・連続性

命題 5.5 (複素関数の和・差・積・商の極限)

$\Omega \subset \mathbb{C}$, $c \in \overline{\Omega}$. $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ が $z \to c$ のとき極限を持つとき、

$$\lim_{z\to c}(f(z)+g(z)) = \lim_{z\to c} f(z) + \lim_{z\to c} g(z),$$
$$\lim_{z\to c}(f(z)-g(z)) = \lim_{z\to c} f(z) - \lim_{z\to c} g(z),$$
$$\lim_{z\to c}(f(z)g(z)) = \lim_{z\to c} f(z) \cdot \lim_{z\to c} g(z),$$
$$\lim_{z\to c}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z\to c} f(z)}{\lim_{z\to c} g(z)} \quad \left(\text{ただし } \lim_{z\to c} g(z) \neq 0 \text{ とする}\right).$$

証明 (方針のみ) 「数学解析」で実多変数関数の場合の命題を紹介した。その証明と同様に証明できる。

別証明 (方針のみ) 対応する実 2 変数関数 (実部、虚部) を考えて、その極限の性質に帰着させることも出来る。例えば、$f = u_1 + iv_1$, $g = u_2 + iv_2$, $fg = u_3 + iv_3$ とするとき、$fg = (u_1 + iv_1)(u_2 + iv_2) = u_3 + iv_3$ より $u_3 = u_1u_2 - v_1v_2$, $v_3 = u_1v_2 + v_1u_2$ であり、u_3 と v_3 は、u_1, u_2, v_1, v_2 から和・差・積で出来ているので収束する。ゆえに fg は… □

系 5.6

連続な複素関数の和・差・積・商 (ただし商の場合は分母が 0 にならない範囲で考える) は連続である。

この応用、あるいは系として、以下が得られる。

複素係数の多項式

$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \quad (a_0, a_1, \cdots, a_n$ は複素数の定数)

に対して多項式関数 $P\colon \mathbb{C} \ni z \mapsto P(z) \in \mathbb{C}$ は連続である。

z を変数とする複素係数多項式全体の集合を $\mathbb{C}[z]$ で表す。

複素係数の有理式

$$r(z) = \frac{q(z)}{p(z)} \quad (p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z],\ p(z) \neq 0)$$

に対して、有理関数 $r\colon \Omega \ni z \mapsto r(z) \in \mathbb{C}$, $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid p(z) \neq 0\}$ は連続である。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2021/complex2021.pdf (2014〜).

[2] 桂田祐史：数学解析, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kaiseki-2021/kaiseki-2021.pdf (2014 年〜).

[3] 杉浦光夫：解析入門 I, 東京大学出版会 (1980), 詳しい (しばしば辞書的といわれる)。丸善 eBook では、https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046843 でアクセスできる．　この eBook まともな目次を付けてほしい.