

# 複素関数・同演習 第4回

～ $n$ 乗根～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/>

2021年9月29日

# 目次

## 1 本日の内容・連絡事項

## 2 複素数の定義と基本的な性質

### ● $n$ 乗根

- 定義と極形式表示
- $\pm 1$  の  $n$  乗根
- よくあるよくない解答
- 余談 1: 定木とコンパスによる正  $n$  角形の作図 (円周の等分)
- 余談 2:  $\sin 1^\circ$ ,  $\cos 1^\circ$  を求めて
- 遊び (脱線) の時間: Mathematica で  $z^n = c$  を解く

## 3 参考文献

## 本日の講義内容

- 本日は1テーマ。講義ノート [1] の 1.11 の内容「 $n$ 乗根」を講義する。 $n$ 乗根はあちこちに出て来るので、正確に処理できることが重要。

## 連絡事項

- 現在までのアンケートの回答率が1/3程度…オフィスアワーをいつにするか、9/29(水)中に決めるので、なるべく回答して下さい(ㄉ切 9/29 22:00)。
- 宿題2を出します(問題公開は、ぎりぎり授業開始時になるかもしれません)。ㄉ切は一応10月5日(火)13:30とします。学期始めなので、その後1週間まで提出を受け付けますが、なるべくㄉ切を守って下さい(ㄉ切に遅れると添削が遅れる可能性があります)。

## 1.11 $n$ 乗根 1.11.1 定義と極形式表示

平方根ほど簡単ではないけれど…一応存在は確かめられる。

### 定義 4.1 ( $n$ 乗根)

$n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $c \in \mathbb{C}$  とするとき、

$$(1) \quad z^n = c$$

を満たす  $z$  を  $c$  の  $n$ 乗根 (an  $n$ -th root of  $c$ ) と呼ぶ。

$n = 2$  のとき**平方根** (square root)、 $n = 3$  のとき**立方根** (cube root) と呼ぶ。

$c = 0$  のとき、 $c$  の  $n$ 乗根は  $0$  のみである。

一応注意しておく 複素数の平方根は、必ず実数の  $\sqrt{\quad}$  で表せた (定理 2.2)。しかし複素数の  $n$ 乗根は、 $n$  が  $2$  の冪であるときは例外として、それが出来ることは期待できない (この問題には深入りしない)。

その他 <sup>べきこん</sup>**冪根**, <sup>るいじょうこん</sup>**累乗根** という言葉もあるが、ここでは使わない ( $n$  を指定しないとあまり意味が無いので)。

## 1.11.1 定義と極形式表示

極形式を用いると  $n$  乗根は容易に求まる。次の定理はマスターすること。

### 定理 4.2 (複素数の $n$ 乗根)

$n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $c \in \mathbb{C}$ ,  $c \neq 0$  とする。

$$(2) \quad c = \rho e^{i\phi} \quad (\rho > 0, \phi \in \mathbb{R})$$

とおくとき、 $c$  の相異なる  $n$  乗根は  $n$  個存在し、それらは

$$(3) \quad \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

である。これらは複素平面上で、原点中心、半径  $\sqrt[n]{\rho}$  の円周の  $n$  等分点である。

(求め方を示すだけでなく、存在することを証明してあるのが重要。)

この定理は、公式を暗記するだけでなく、自力で導出できるようにしておくのが望ましい(ちゃんと出来ない人がとても多い)。

**問**  $\sqrt[n]{\rho}$  は何であるか、説明せよ。(ヒント:  $y = x^n$  のグラフを考える。)

## 1.11.1 定義と極形式表示

**証明**  $z = re^{i\theta}$  ( $r > 0, \theta \in \mathbb{R}$ ) とおくと

$$z^n = c \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\phi} \Leftrightarrow (r^n = \rho \wedge e^{in\theta} = e^{i\phi}).$$

(注  $r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\phi}$  の両辺の絶対値を取って  $r^n = \rho$  を得るのが  $\Rightarrow$  のポイント。)  $\rho > 0, r > 0$  に注意すると、 $r^n = \rho \Leftrightarrow r = \sqrt[n]{\rho}$  が分かる。もう一方から

$$\begin{aligned} e^{in\theta} = e^{i\phi} &\Leftrightarrow n\theta \equiv \phi \pmod{2\pi} \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad n\theta - \phi = k \cdot 2\pi \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad \theta = \frac{\phi}{n} + k \frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} z^n = c &\Leftrightarrow \left( r = \sqrt[n]{\rho} \wedge (\exists k \in \mathbb{Z}) \theta = \frac{\phi}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) z = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\phi}{n} + k \frac{2\pi}{n}\right)}. \end{aligned}$$

(一見無限個の解があるように思うかもしれないが)  $k$  が  $n$  増えると元に戻る (周期  $n$ ) ので、 $k = 0, 1, \dots, n-1$  だけで重複なく、漏れもない。 □

## 1.11.1 定義と極形式表示

### 系 4.3 (1 の $n$ 乗根)

$n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  とする。1 の  $n$  乗根は

$$e^{ik\frac{2\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

の  $n$  個である。これらは、 $\omega := e^{i\frac{2\pi}{n}}$  とおくと次のように表せる。

$$\omega^k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

これは単位円周の  $n$  等分点である。

これから

$$z^n - 1 = (z - 1)(z - \omega) \cdots (z - \omega^{n-1}).$$

また定理 4.2 の  $z$  は次のように表せる。

$$z = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\phi}{n}} \omega^k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

特に  $-1$  の  $n$  乗根は、 $e^{i\frac{\pi}{n}} \omega^k$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) と表せる。 $\omega$  は便利である。

## 1.11.2 $\pm 1$ の $n$ 乗根 (1)

良い計算練習になるので、 $n$  が小さいとき、 $1$  と  $-1$  の  $n$  乗根を求めてみよう。 $z^n = 1$  と  $z^n = -1$  を解く、ということでもある。(以下で説明するが、後で自分でやってみることを勧める)

$$1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0} \text{ だから、} z^n = 1 \text{ の解は } z = \sqrt[n]{1} e^{i(\frac{0}{n} + k \frac{2\pi}{n})} = e^{i \frac{k 2\pi}{n}} \quad (k = 0, \dots, n-1).$$
$$-1 = 1 \cdot e^{i\pi} \text{ だから、} z^n = -1 \text{ の解は } z = \sqrt[n]{1} e^{i(\frac{\pi}{n} + k \frac{2\pi}{n})} = e^{i \frac{(2k+1)\pi}{n}} \quad (k = 0, \dots, n-1).$$

このように指数形式で表すことは、定理 4.2 の直接的適用であるが、実数の根号  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  で表せるときはそうして見よう。

①  $n = 2$  のとき。

$$z^2 = 1 \text{ の解は } e^{i \cdot k \frac{2\pi}{2}} = e^{ik\pi} \quad (k = 0, 1) \text{ であるから } e^0 = 1, e^{i\pi} = -1.$$

これは

$$z^2 - 1 = (z + 1)(z - 1)$$

と因数分解できることから分かる。

$$z^2 = -1 \text{ の解は } e^{i(\frac{\pi}{2} + k \frac{2\pi}{2})} = e^{i \frac{(2k+1)\pi}{2}} \quad (k = 0, 1) \text{ であるから、} e^{i \frac{\pi}{2}} = i, e^{i \frac{3\pi}{2}} = -i.$$

これは

$$z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$$

と因数分解できることから分かる。

## 1.11.2 $\pm 1$ の $n$ 乗根 (2)

②  $n = 3$  のとき。

$z^3 = 1$  の解は  $z = e^{i \cdot k \frac{2\pi}{3}}$  ( $k = 0, 1, 2$ ) であるから、 $e^0 = 1$ ,  $e^{i \frac{2\pi}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ,  
 $e^{i \frac{4\pi}{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ .

一方、

$$z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$$

という因数分解で、右辺の第 2 因数の根は (2 次方程式の解として)  $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$  と求まるから)

$$z^3 - 1 = (z - 1) \left( z - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \left( z - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right).$$

$z^3 = -1$  の解は  $z = e^{i(\frac{\pi}{3} + k \frac{2\pi}{3})} = e^{i \frac{(2k+1)\pi}{3}}$  ( $k = 0, 1, 2$ ) であるから、  
 $e^{i \frac{\pi}{3}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ,  $e^{i \frac{3\pi}{3}} = -1$ ,  $e^{i \frac{5\pi}{3}} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ .

また因数分解も上と同様に

$$z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1) = (z + 1) \left( z - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \left( z - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right).$$

## 1.11.2 $\pm 1$ の $n$ 乗根 (3)

- $n = 4$  のとき。

$z^4 = 1$  の解は  $z = e^{ik\frac{2\pi}{4}} = e^{ik\frac{\pi}{2}}$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) であるから、 $e^0 = 1$ ,  $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ ,  $e^{i\pi} = -1$ ,  $e^{i\frac{3\pi}{4}} = -i$ . 因数分解からも分かる。実際

$$z^4 - 1 = (z^2 + 1)(z^2 - 1) = (z + i)(z - i)(z + 1)(z - 1).$$

$z^4 = -1$  の解は  $z = e^{i(\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{4})} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{4}}$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) であるから、

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

一方、

$$z^4 + 1 = (z^2 + i)(z^2 - i).$$

と因数分解して、 $z^2 = -i$ ,  $z^2 = i$  を解けなくもないが (平方根の計算は出来るはず)、そうするよりも

$$\begin{aligned} z^4 + 1 &= z^4 + 2z^2 + 1 - 2z^2 = (z^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}z)^2 \\ &= (z^2 + \sqrt{2}z + 1)(z^2 - \sqrt{2}z + 1) \end{aligned}$$

と因数分解すれば、2つの2次方程式の根として簡単に求まる。

$$z = \frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2} \quad (\text{上の結果と一致}).$$

## 1.11.2 $\pm 1$ の $n$ 乗根 (4)

④  $n = 5$  のとき。

$z^5 = 1$  の解は  $z = e^{ik\frac{2\pi}{5}}$  ( $k = 0, 1, \dots, 4$ ) であるから、 $e^0 = 1$ ,  $e^{i\frac{2\pi}{5}}$ ,  $e^{i\frac{4\pi}{5}}$ ,  $e^{i\frac{6\pi}{5}}$ ,  $e^{i\frac{8\pi}{5}}$ . これらは  $\sqrt{\quad}$  を使って表現可能である。(以下の計算に注目)

$$z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

であるが、

$$\begin{aligned} z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 &\Leftrightarrow z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = 0. \end{aligned}$$

$X = z + \frac{1}{z}$  とおくと、 $X^2 + X - 1 = 0$  で、この解は  $X = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad z + \frac{1}{z} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow 2z^2 + (1 - \sqrt{5})z + 2 = 0 \quad \vee \quad 2z^2 + (1 + \sqrt{5})z + 2 = 0. \end{aligned}$$

ゆえに

$$z = 1, \frac{-(1 - \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-(1 + \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

## 1.11.2 $\pm 1$ の $n$ 乗根 (5)

一方、 $z^5 = -1$  の解は  $z = e^{i(\frac{\pi}{5} + k\frac{2\pi}{5})} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{5}}$  ( $k = 0, 1, \dots, 4$ ) であるから、 $e^{i\frac{\pi}{5}}$ ,  $e^{i\frac{3\pi}{5}}$ ,  $e^{i\frac{5\pi}{5}} = -1$ ,  $e^{i\frac{7\pi}{5}}$ ,  $e^{i\frac{9\pi}{5}}$ . これらは  $\sqrt{\quad}$  を使って表現可能である。

$$z^5 + 1 = (z + 1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1)$$

であるが、

$$\begin{aligned} z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0 &\Leftrightarrow z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0. \end{aligned}$$

$X = z + \frac{1}{z}$  とおくと、 $X^2 - X - 1 = 0$  で、この解は  $X = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad z + \frac{1}{z} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow 2z^2 - (1 + \sqrt{5})z + 2 = 0 \quad \vee \quad 2z^2 - (1 - \sqrt{5})z + 2 = 0. \end{aligned}$$

ゆえに

$$z = -1, \frac{(1 + \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \frac{(1 - \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

( $n = 5$  を振り返り: 代数的に解くことで  $\frac{\pi}{5}$  の  $\cos$ ,  $\sin$  が求まるのは注目に値する。)

## 1.11.2 $\pm 1$ の $n$ 乗根 (6)

- $n = 6$  のとき。これは宿題にすることがあるので、ここには書かない。
- $n = 7$  のとき。

$z^7 = 1$  の解は  $e^{ik\frac{2\pi}{7}}$  ( $k = 0, 1, \dots, 6$ ) であるから、 $e^0 = 1, e^{i\frac{2\pi}{7}}, e^{i\frac{4\pi}{7}}, e^{i\frac{6\pi}{7}}, e^{i\frac{8\pi}{7}}, e^{i\frac{10\pi}{7}}, e^{i\frac{12\pi}{7}}$ 。

$z^7 = -1$  の解は  $e^{i(\frac{\pi}{7} + k\frac{2\pi}{7})} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{7}}$  ( $k = 0, 1, \dots, 6$ ) であるから、 $e^{i\frac{\pi}{7}}, e^{i\frac{3\pi}{7}}, e^{i\frac{5\pi}{7}}, e^{i\frac{7\pi}{7}} = -1, e^{i\frac{9\pi}{7}}, e^{i\frac{11\pi}{7}}, e^{i\frac{13\pi}{7}}$ 。

これらは (1, -1 を除いて)、 $\sqrt{\quad}$  を使うことで表せないことが知られている (そういう問題を一般的に解決したのは Gauss である)。

- $n = 8$  のとき。これも宿題にすることがあるので、ここには書かない。  $\square$

### 1.11.3 よくあるよくない解答

この講義では、 $n$ 乗根を求めなさい、という問題について、特に指定をしない限り、定理 4.2 の公式に当てはめて求めれば OK、とする。(2 次方程式の問題で、解の公式に代入して解を求めれば良い、というのに似ている。場合によっては、解の公式を導出させる問題があるかもしれないが、一方で公式を正確に使えることも重要である。)

ところが次のような答案を書いて悩ませてくれる人が少なくない。例えば「 $z^5 = 1$  の解を求めよ」という問に対して

$$z^5 = 1 = 1e^{i \cdot 0} = e^{2k\pi i} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

であるから

$$z = e^{\frac{2k\pi i}{5}} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

ゆえに

$$z = e^{\frac{2k\pi i}{5}} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

これは結果は正しいけれど、論理が破綻しているので(「行間を埋められますか?」と尋ねたくなる)非常に抵抗を感じて、減点したくなって来る。

## 余談 1: 定木とコンパスによる正 $n$ 角形の作図 (円周の等分)

以上の話は、**定木とコンパスによる正  $n$  角形の作図**と関係がある。Gauss (1777-1855) は、定木とコンパスで正  $n$  角形が作図できるためには、 $n$  が

$$n = 2^k \times \text{相異なるフェルマー素数 } F_m \text{ の積}$$

の形をしていることが必要十分であることを証明し (1801 年発表)、 $n = 17 = F_2$  のときの作図法を示した (発見は 1796 年)。つまり正 17 角形は作図可能である<sup>1</sup>。これは有名な話で多くの本に載っているが、参考文献として、高木 [2], 栗原 [3] をあげておく。

**フェルマー素数**とは、**フェルマー数**  $F_m := 2^{2^m} + 1$  のうち、素数であるもののである。 $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65537$  はフェルマー素数であるが、 $F_5$  は素数でない ( $F_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$  と素因数分解出来ることを Euler (1707-1783) が発見した)。

定木とコンパスで作図可能となる  $n$  は、小さい順に  $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, \dots$  □

---

<sup>1</sup>  $\cos \frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16} \left( -1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}} \right) = 0.932472229404355 \dots$

## 余談2: $\sin 1^\circ$ , $\cos 1^\circ$ を求めて

高校で、 $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  の  $\sin$ ,  $\cos$  の値を学んだ。正五角形の作図も良く出て来る問題で、 $36^\circ$ ,  $72^\circ$  の  $\sin$ ,  $\cos$  の値も求めたことがあるかもしれない(大学入試のネタになります)。これらは  $\sqrt{\quad}$  を使って表せる。

半角の公式を使うと、 $18^\circ$ ,  $15^\circ$  の  $\sin$ ,  $\cos$  も  $\sqrt{\quad}$  で表せる。加法定理を使うと、 $18^\circ - 15^\circ = 3^\circ$  の  $\sin$ ,  $\cos$  も  $\sqrt{\quad}$  で表せることが分かる。

それでは  $1^\circ$  の  $\sin$ ,  $\cos$  はどうだろう? もしこれが  $\sqrt{\quad}$  で表されれば、任意の自然数  $n$  に対して  $n^\circ$  の  $\sin$ ,  $\cos$  が  $\sqrt{\quad}$  で表される。

この問題は、「[角の三等分](#)」とも関係があり、(結論を天下一りに述べると)  $1^\circ$  の  $\sin$ ,  $\cos$  を  $\sqrt{\quad}$  で表すことは出来ないことが知られている。

アル・カーシー (ジャムシード・ギヤースッディーン・アル・カーシー, 1380-1429, ペルシャの数学者・[天文学者](#)) は、3次方程式  $\sin 3^\circ = 3x - 4x^3$  を数値的に解くことによって ( $\sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$  に注意)、 $\sin 1^\circ$  を求めた (カツツ [4])。

# 遊び(脱線)の時間: Mathematica で $z^n = c$ を解く

Mathematica で3乗根を求めてみよう。 $z^3 = i$ を解くには

```
ComplexExpand[Solve[z^3==I,z]]
```

あるいは  $((x + yi)^3 = i$  を解くことにして)

```
Solve[{x^3-3x y^2==0,3x^2 y-y^3==1},{x,y},Reals]
```

この解は実数の  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$  で表せる ( $z = -i, \frac{\pm\sqrt{3} + i}{2}$ )。

ところが  $z^3 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$  はうまく行かない。(この辺は角の三等分とも関係する。30°の三等分は、実数の  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ ,  $\sqrt{\phantom{x}}$  では表せない。三角関数を使って答えを表す。)

一方、これを書いているときに気づいたのだけど、今の Mathematica は、 $z^{17} = 1$  を  $\sqrt{\phantom{x}}$  で解けるようになっている (Mathematica 12 で確認)。

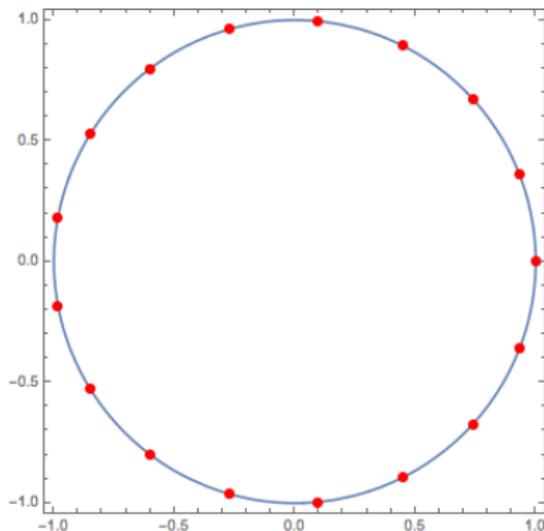
```
ComplexExpand[Solve[z^17==1,z]]  
ToRadicals[%]
```

(そのうち Mathematica が  $z^{257} = 1$  を解けるようになるだろうか?)

# 遊び (脱線) の時間: Mathematica で $z^n = c$ を解く

前のスライドの最後の結果はごちゃごちゃしているけれど、本当に 17 等分点だろうか？

```
g0 = ContourPlot[x^2 + y^2 == 1, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
plotpoints[l_]:=Show[g0,ListPlot[l,PlotStyle->Directive[Red,PointSize[Large]]]]
points17={Re[z],Im[z]}/.ToRadicals[ComplexExpand[Solve[z^17==1,z]]]
regular17gon=plotpoints[points17]
```



# 参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2021/complex2021.pdf> (2014～).
- [2] 高木貞治：近世数学史談及雑談，共立出版 (1946)，1996年に「近世数学史談・数学雑談復刻版」として復刻されている。また1995年に岩波文庫に「近世数学史談」が入った。
- [3] 栗原将人：ガウスの数論世界をゆく：正多角形の作図から相互法則・数論幾何へ，数学書房 (2017/5/15).
- [4] ヴィクター J. カッツ：カッツ 数学の歴史，共立出版 (2005)，上野 健璽・三浦伸夫監訳，中根美千代・高橋秀裕・林知宏・大谷卓史・佐藤賢一・東慎一郎・中澤聡翻訳. 原著は、Victor J. Katz, A History of Mathematics, A: An Introduction, Second Edition, Addison Wesley Longman (1998).