複素関数・同演習 第3回

〜複素指数関数、極形式〜

桂田 祐史（かつらだ まさし）

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/

2021年9月28日

目次

本日の内容・連絡事項

- 9 月 29 日に宿題 2 を出します (Oh-o Meiji の「複素関数演習」のレポートを見て下さい。〆切 10 月 5 日 13:30)。
- (重要) 複素関数、複素関数演習は両方履修するようお願いしています。もしも複素関数のみを履修する人は、宿題の提出は次のようにして下さい。水曜日の段階で

  「授業 WWW サイト」

  にアクセスして宿題の課題文を読みレポートを作成し、翌週の火曜 13:30 までに Meiji メールを使って、katurada あっと meiji ドット ac どっと jp までに送って下さい。
- 本来ならば先週の宿題の解説をすべきところですが、まだ始まったばかりなので、宿題 1 の提出は 10 月 5 日 13:30 まで待つことにしています。(返却はそれ以前に始めるかもしれません。特に難しくないので、解説が遅くなっても大丈夫だと考えています。)
- 今日は、講義ノート [1] の §1.8, 1.9, 1.10 の内容を講義する。

1.8 複素指数関数のフライング導入

この講義では多くの初等関数を冪級数を用いて定義する。指数関数について、そうすると

$$e^z = \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (\text{冪級数による定義})$$

となる。

1.8 複素指数関数のフライング導入

この講義では多くの初等関数を冪級数を用いて定義する。指数関数について、そうすると

$$e^z = \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{(冪級数による定義)}$$

となる。しかし、指数関数は便利なので、冪級数の説明に先走って導入する。後で冪級数で定義しても同じであることを確認する。

1.8 複素指数関数のフライング導入

この講義では多くの初等関数を冪級数を用いて定義する。指数関数について、そうすると

$$e^z = \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (\text{冪級数による定義})$$

となる。しかし、指数関数は便利なので、冪級数の説明に先走って導入する。後で冪級数で定義しても同じであることを確認する。

定義 3.1 (複素指数関数)

$z = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R})$ に対して、

$$e^z = \exp z := e^x (\cos y + i \sin y). \tag{1}$$

赤字は実関数としての指数関数。本来は別の記号にすべきかもしれないが拡張なので同じ記号にする。

1.8 複素指数関数のフライング導入

この講義では多くの初等関数を冪級数を用いて定義する。指数関数について、そうすると

$$e^z = \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{(冪級数による定義)}$$

となる。しかし、指数関数は便利なので、冪級数の説明に先走って導入する。後で冪級数で定義しても同じであることを確認する。

定義 3.1 (複素指数関数)

$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対して、

$$e^z = \exp z := e^x (\cos y + i \sin y). \tag{1}$$

赤字は実関数としての指数関数。本来は別の記号にすべきかもしれないが拡張なので同じ記号にする。

(細かい注) e^z と書くと「e の z 乗」と読みたくなり、実際にそう呼んだりするが、複素数の場合に一般の (指数が整数でないという意味) の冪乗はまだ定義していないので、本当はおかしい。

1.8 複素指数関数のフライング導入

実指数関数の拡張である。すなわち

$$z \in \mathbb{R} \Rightarrow e^z = e^z. \tag{2}$$

1.8 複素指数関数のフライング導入

実指数関数の拡張である。すなわち

$$z \in \mathbb{R} \Rightarrow e^z = e^z. \tag{2}$$

実際、$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ について、$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = 0$. このとき、
$e^z = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x = e^z$.

1.8 複素指数関数のフライング導入

実指数関数の拡張である。すなわち

(2) $$z \in \mathbb{R} \Rightarrow e^z = e^z.$$

実際、$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ について、$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = 0$. このとき、
$e^z = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x = e^z$.

(3) $$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

1.8 複素指数関数のフライング導入

実指数関数の拡張である。すなわち

(2)
$$z \in \mathbb{R} \Rightarrow e^z = e^z.$$

実際、$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ について、$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = 0$. このとき、
$e^z = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x = e^z$.

(3)
$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

実際、(実数の世界の) 指数関数の指数法則と三角関数の加法定理により

$$\begin{aligned}
e^{z_1+z_2} &= e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} \\
&= e^{x_1+x_2}\left(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\right) \\
&= e^{x_1} e^{x_2}\left(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i\left(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2\right)\right),
\end{aligned}$$

1.8 複素指数関数のフライング導入

実指数関数の拡張である。すなわち

(2) $$z \in \mathbb{R} \Rightarrow e^z = e^z.$$

実際、$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ について、$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = 0$. このとき、
$e^z = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x = e^z$.

(3) $$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

実際、(実数の世界の) 指数関数の指数法則と三角関数の加法定理により

$$\begin{aligned}
e^{z_1+z_2} &= e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} \\
&= e^{x_1+x_2} \left(\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)\right) \\
&= e^{x_1} e^{x_2} \left(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i \left(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2\right)\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{z_1} e^{z_2} &= \left(e^{x_1} \left(\cos y_1 + i \sin y_1\right)\right) \left(e^{x_2} \left(\cos y_2 + i \sin y_2\right)\right) \\
&= e^{x_1} e^{x_2} \left(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i \left(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2\right)\right)
\end{aligned}$$

であるから $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$. □

1.8 複素指数関数のフライング導入

(4) $(\forall z\in\mathbb{C})\quad e^z\neq 0,\quad e^{-z}=\dfrac{1}{e^z}.$　　(∀ を書くのは強調しているつもり。)

1.8 複素指数関数のフライング導入

(4) $(\forall z \in \mathbb{C}) \quad e^z \neq 0, \quad e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}.$ （$\forall$ を書くのは強調しているつもり。）

実際 $e^z e^{-z} = e^{z+(-z)} = e^0 = 1 \neq 0$ なので、$e^z \neq 0$. 割り算して $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

$e^z \neq 0$ (**指数関数は 0 にならない**) は意外と重要である。

1.8 複素指数関数のフライング導入

(4) $(\forall z \in \mathbb{C})\quad e^z \neq 0,\quad e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}.$ (∀ を書くのは強調しているつもり。)

実際 $e^z e^{-z} = e^{z+(-z)} = e^0 = 1 \neq 0$ なので、$e^z \neq 0$. 割り算して $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

$e^z \neq 0$ (**指数関数は 0 にならない**) は意外と重要である。

z が純虚数のときを考える。$z = i\theta$ $(\theta \in \mathbb{R})$ のとき $(x = 0,\ y = \theta$ であるから$\cdots)$

(5)
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad (\textbf{Euler の公式}).$$

この式に慣れるべき！ (加法定理よりは指数法則の方が楽だし)
図形的に把握することを勧める (次のスライド)。

1.8 複素指数関数のフライング導入

(4) $(\forall z \in \mathbb{C})\quad e^z \neq 0,\quad e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}.$　　(∀ を書くのは強調しているつもり。)

実際 $e^z e^{-z} = e^{z+(-z)} = e^0 = 1 \neq 0$ なので、$e^z \neq 0$. 割り算して $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

$e^z \neq 0$ (**指数関数は 0 にならない**) は意外と重要である。

z が純虚数のときを考える。$z = i\theta$ $(\theta \in \mathbb{R})$ のとき $(x = 0,\ y = \theta$ であるから$\cdots)$

(5) $$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad (\textbf{Euler の公式}).$$

この式に慣れるべき！ (加法定理よりは指数法則の方が楽だし)
図形的に把握することを勧める (次のスライド)。

注意 3.2 (教育的指導)

$e^{i\theta}$ を見ると、ほとんど反射的に (5) を使って、cos, sin で表現して計算する人が毎年かなりの数いるが、複素指数関数で表現できているものは、たいていの場合は、複素指数関数のままで計算する方が便利である。いつも cos, sin に直していては、複素指数関数に慣れる機会が失われてしまうので、どちらかというと、できる限り複素指数関数のままで計算するよう心がけることを勧める。

1.8 複素指数関数のフライング導入

このスライドの式は、(5) を用いて確かめ、かつ図形的に理解 (把握) しよう。

(6) $$e^{\frac{\pi}{2}i} = i, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i, \quad e^{2\pi i} = 1.$$

1.8 複素指数関数のフライング導入

このスライドの式は、(5) を用いて確かめ、かつ図形的に理解 (把握) しよう。

(6)
$$e^{\frac{\pi}{2}i} = i, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i, \quad e^{2\pi i} = 1.$$

(7)
$$\cos\theta = \mathrm{Re}\, e^{i\theta}, \quad \sin\theta = \mathrm{Im}\, e^{i\theta}.$$

1.8 複素指数関数のフライング導入

このスライドの式は、(5) を用いて確かめ、かつ図形的に理解 (把握) しよう。

(6) $$e^{\frac{\pi}{2}i}=i,\quad e^{\pi i}=-1,\quad e^{\frac{3}{2}\pi i}=-i,\quad e^{2\pi i}=1.$$

(7) $$\cos\theta=\mathrm{Re}\,e^{i\theta},\quad \sin\theta=\mathrm{Im}\,e^{i\theta}.$$

(5) で θ の代わりに $-\theta$ を代入すると

(8) $$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta.$$

1.8 複素指数関数のフライング導入

このスライドの式は、(5) を用いて確かめ、かつ図形的に理解 (把握) しよう。

(6) $$e^{\frac{\pi}{2}i}=i,\quad e^{\pi i}=-1,\quad e^{\frac{3}{2}\pi i}=-i,\quad e^{2\pi i}=1.$$

(7) $$\cos\theta=\mathrm{Re}\,e^{i\theta},\quad \sin\theta=\mathrm{Im}\,e^{i\theta}.$$

(5) で θ の代わりに $-\theta$ を代入すると

(8) $$e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta.$$

$e^{i\theta}$ と $e^{-i\theta}$ は単位円上にあり、実軸に関して対称)

(9) $$\left|e^{i\theta}\right|=1,\quad \overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}.$$

1.8 複素指数関数のフライング導入

(5) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と (8) $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ を、$\cos\theta$, $\sin\theta$ についての連立方程式として解くと

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \tag{10}$$

しょっちゅう出て来るので、そのうち慣れるはず。最後には覚える、と覚悟する。

1.8 複素指数関数のフライング導入

(5) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ と (8) $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ を、$\cos\theta$, $\sin\theta$ についての連立方程式として解くと

(10) $$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

しょっちゅう出て来るので、そのうち慣れるはず。最後には覚える、と覚悟する。

絶対値については、$|e^z| = \left|e^x e^{iy}\right| = |e^x|\left|e^{iy}\right| = e^x \cdot 1 = e^x$ であるから

(11) $$|e^z| = e^x = e^{\mathrm{Re}\, z}.$$

1.8 複素指数関数のフライング導入

$$(e^z)^n = e^{nz} \quad (n \in \mathbb{Z},\ z \in \mathbb{C}). \tag{12}$$

(12) $$(e^z)^n = e^{nz} \quad (n \in \mathbb{Z},\ z \in \mathbb{C}).$$

実際、$n = 0$ の場合は、両辺とも 1 であるから、成立する。$n \in \mathbb{N}$ の場合は

$$e^{z_1+z_2+\cdots+z_n} = e^{z_1} e^{z_2} \cdots e^{z_n}$$

であるから、$z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$ のとき $e^{nz} = (e^z)^n$. $n < 0$ のときは、$n = -m$ とすると、$e^{nz} = e^{-mz} = \dfrac{1}{e^{mz}} = \dfrac{1}{(e^z)^m} = (e^z)^{-m} = (e^z)^n$. □

(12) $$(e^z)^n = e^{nz} \quad (n \in \mathbb{Z},\ z \in \mathbb{C}).$$

実際、$n = 0$ の場合は、両辺とも 1 であるから、成立する。$n \in \mathbb{N}$ の場合は

$$e^{z_1+z_2+\cdots+z_n} = e^{z_1}e^{z_2}\cdots e^{z_n}$$

であるから、$z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$ のとき $e^{nz} = (e^z)^n$. $n < 0$ のときは、$n = -m$ とすると、$e^{nz} = e^{-mz} = \dfrac{1}{e^{mz}} = \dfrac{1}{(e^z)^m} = (e^z)^{-m} = (e^z)^n$. □

特に $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$. すなわち

(13) $$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad (\textbf{de Moivre の公式}).$$

(結局は三角関数の加法定理と帰納法で、高校の時と違う証明をしたわけではない。)

1.8 複素指数関数のフライング導入

(12) $$(e^z)^n = e^{nz} \quad (n \in \mathbb{Z},\ z \in \mathbb{C}).$$

実際、$n = 0$ の場合は、両辺とも 1 であるから、成立する。$n \in \mathbb{N}$ の場合は

$$e^{z_1+z_2+\cdots+z_n} = e^{z_1} e^{z_2} \cdots e^{z_n}$$

であるから、$z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$ のとき $e^{nz} = (e^z)^n$. $n < 0$ のときは、$n = -m$ とすると、$e^{nz} = e^{-mz} = \dfrac{1}{e^{mz}} = \dfrac{1}{(e^z)^m} = (e^z)^{-m} = (e^z)^n$. $\square$

特に $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$. すなわち

(13) $$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad (\textbf{de Moivre の公式}).$$

(結局は三角関数の加法定理と帰納法で、高校の時と違う証明をしたわけではない。)

注意 3.3 (一般の冪)

一般の冪 a^b はまだ定義していない (しばらく待って下さい)。実は $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$ の形の指数法則は一般には成り立たない。(12) は、その形の指数法則とはみなさない方が良い。

1.9 極形式　1.9.1 定義

複素数を極座標で表した式のことを**極形式** (polar form) とよぶ。

複素数を極座標で表した式のことを**極形式** (polar form) とよぶ。

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ とするとき、

$$(\exists r \geq 0)(\exists \theta \in \mathbb{R}) \quad (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

この r, θ を (x, y) の**極座標**という。

- r は一意的に定まる: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- θ は、$r > 0$ のとき (いいかえると $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき) 2π の整数倍の不定差を除いて定まる。$r = 0$ のとき、θ は何でもよい。
  $0 \leq \theta < 2\pi$ や $-\pi < \theta \leq \pi$ のように条件をつけると ($\alpha \leq \theta < \alpha + 2\pi$ あるいは $\alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi$)、一意的に定まる。

—— 以上は高校生も知っていること。

複素数を極座標で表した式のことを**極形式** (polar form) とよぶ。

$(x,y)\in\mathbb{R}^2$ とするとき、

$$(\exists r\ge 0)(\exists\theta\in\mathbb{R})\quad (x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

この r, θ を (x,y) の**極座標**という。

- r は一意的に定まる: $r=\sqrt{x^2+y^2}$.
- θ は、$r>0$ のとき (いいかえると $(x,y)\ne(0,0)$ のとき) 2π の整数倍の不定差を除いて定まる。$r=0$ のとき、θ は何でもよい。
  $0\le\theta<2\pi$ や $-\pi<\theta\le\pi$ のように条件をつけると ($\alpha\le\theta<\alpha+2\pi$ あるいは $\alpha<\theta\le\alpha+2\pi$)、一意的に定まる。

—— 以上は高校生も知っていること。

$z\in\mathbb{C}$ とすると、

$$(\exists r\ge 0)(\exists\theta\in\mathbb{R})\quad z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}. \tag{14}$$

この式 ($z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ あるいは $z=re^{i\theta}$) を z の**極形式**という。なるべく後者を使うこと (慣れて欲しいから、その方が誤解を招きにくいから)。

1.9.2 偏角

$z \in \mathbb{C}$ に対して、$r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ が $z = re^{i\theta}$ を満たしているとする。

1.9.2 偏角

$z \in \mathbb{C}$ に対して、$r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ が $z = re^{i\theta}$ を満たしているとする。

$r = |z|$ である。

1.9.2 偏角

$z \in \mathbb{C}$ に対して、$r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ が $z = re^{i\theta}$ を満たしているとする。

$r = |z|$ である。

$z \neq 0$ のとき、θ は 2π の不定差を除いて定まる。θ を z の**偏角** (an argument) とよび、$\arg z$ と表す。

1 つの実数として定まらないので、やや曖昧なところがある。

1.9.2 偏角

$z \in \mathbb{C}$ に対して、$r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ が $z = re^{i\theta}$ を満たしているとする。

$r = |z|$ である。

$z \neq 0$ のとき、θ は 2π の不定差を除いて定まる。θ を z の**偏角** (an argument) とよび、$\arg z$ と表す。

1 つの実数として定まらないので、やや曖昧なところがある。

範囲を $-\pi < \theta \leq \pi$ と限定したとき、ただ 1 つに定まる。それを $\mathrm{Arg}\, z$ と書き、z の**偏角の主値** (the principal argument) とよぶ。

1.9.2 偏角

$z \in \mathbb{C}$ に対して、$r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ が $z = re^{i\theta}$ を満たしているとする。

$r = |z|$ である。

$z \neq 0$ のとき、θ は 2π の不定差を除いて定まる。θ を z の**偏角** (an argument) とよび、$\arg z$ と表す。

1 つの実数として定まらないので、やや曖昧なところがある。

範囲を $-\pi < \theta \leq \pi$ と限定したとき、ただ 1 つに定まる。それを $\operatorname{Arg} z$ と書き、z の**偏角の主値** (the principal argument) とよぶ。

$r_1, r_2 > 0$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ とするとき、

$$r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \quad \Leftrightarrow \quad r_1 = r_2 \wedge (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi. \tag{15}$$

後者 (青い部分) は $\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}$ とも表せる。

1.9.2 偏角

$z \in \mathbb{C}$ に対して、$r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ が $z = re^{i\theta}$ を満たしているとする。

$r = |z|$ である。

$z \neq 0$ のとき、θ は 2π の不定差を除いて定まる。θ を z の**偏角** (an argument) とよび、$\arg z$ と表す。

1 つの実数として定まらないので、やや曖昧なところがある。

範囲を $-\pi < \theta \leq \pi$ と限定したとき、ただ 1 つに定まる。それを $\mathrm{Arg}\, z$ と書き、z の**偏角の主値** (the principal argument) とよぶ。

$r_1, r_2 > 0$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ とするとき、

$$r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \quad \Leftrightarrow \quad r_1 = r_2 \wedge (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi. \tag{15}$$

後者 (青い部分) は $\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}$ とも表せる。

(15) の証明.

$\Leftarrow$ は当たり前。$\Rightarrow$ はまず絶対値を取って $r_1 = r_2$. それを代入して割り算して $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$. これから $(\exists k \in \mathbb{Z})$ $\theta_1 - \theta_2 = k \cdot 2\pi$. $\square$

1.9.3 極形式と偏角の例

例 3.4

以下の z_j の極形式と $\operatorname{Arg} z_j$ を求めてみよう。

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}i, \quad z_3 = -1 - \sqrt{3}i, \quad z_3 = 1 - \sqrt{3}i.$$

例 3.4

以下の z_j の極形式と $\mathrm{Arg}\, z_j$ を求めてみよう。

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}i, \quad z_3 = -1 - \sqrt{3}i, \quad z_3 = 1 - \sqrt{3}i.$$

どの j についても、$|z_j| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2.$

1.9.3 極形式と偏角の例

例 3.4

以下の z_j の極形式と $\operatorname{Arg} z_j$ を求めてみよう。

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}i, \quad z_3 = -1 - \sqrt{3}i, \quad z_3 = 1 - \sqrt{3}i.$$

どの j についても、$|z_j| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2.$

$$z_1 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}, \quad \operatorname{Arg} z_1 = \frac{\pi}{3},$$

例 3.4

以下の z_j の極形式と $\mathrm{Arg}\, z_j$ を求めてみよう。

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}i, \quad z_3 = -1 - \sqrt{3}i, \quad z_3 = 1 - \sqrt{3}i.$$

どの j についても、$|z_j| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2.$

$$z_1 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}, \quad \mathrm{Arg}\, z_1 = \frac{\pi}{3},$$

以下同様に

$$z_2 = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}, \quad \mathrm{Arg}\, z_2 = \frac{2\pi}{3},$$

$$z_3 = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{\frac{4\pi}{3}i} = 2e^{-\frac{2\pi}{3}i}, \quad \mathrm{Arg}\, z_3 = -\frac{2\pi}{3},$$

$$z_4 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}, \quad \mathrm{Arg}\, z_4 = -\frac{\pi}{3}.$$

注意 3.5 (期末試験間違いコレクションから)

$-1+\sqrt{3}i$ の極形式は？答えは一つではない。次は間違いである。

$$-1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

なぜ？

注意 3.5 (期末試験間違いコレクションから)

$-1+\sqrt{3}i$ の極形式は？答えは一つではない。次は間違いである。

$$-1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

なぜ？正しい等式であるが、$\frac{2}{3}\pi$ と $\frac{\pi}{3}$ が一致していないのがマズい。書くところが 2 つあると、別のものを書いてしまうことがある…

1.9.3 極形式と偏角の例

注意 3.5 (期末試験間違いコレクションから)

$-1+\sqrt{3}i$ の極形式は？答えは一つではない。次は間違いである。

$$-1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

なぜ？正しい等式であるが、$\frac{2}{3}\pi$ と $\frac{\pi}{3}$ が一致していないのがマズい。書くところが 2 つあると、別のものを書いてしまうことがある…

$z=re^{i\theta}$ とするとき、$\bar{z}$ の極形式は? $\bar{z}=re^{-i\theta}$. これは OK.

1.9.3 極形式と偏角の例

注意 3.5 (期末試験間違いコレクションから)

$-1+\sqrt{3}i$ の極形式は？答えは一つではない。次は間違いである。

$$-1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

なぜ？正しい等式であるが、$\frac{2}{3}\pi$ と $\frac{\pi}{3}$ が一致していないのがマズい。書くところが 2 つあると、別のものを書いてしまうことがある…

$z = re^{i\theta}$ とするとき、$\bar{z}$ の極形式は? $\bar{z} = re^{-i\theta}$. これは OK. しかし

$$\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$$

は正しい等式だが極形式ではない。マイナス $-$ はマズい。

1.9.3 極形式と偏角の例

注意 3.5 (期末試験間違いコレクションから)

$-1+\sqrt{3}i$ の極形式は？答えは一つではない。次は間違いである。

$$-1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

なぜ？正しい等式であるが、$\frac{2}{3}\pi$ と $\frac{\pi}{3}$ が一致していないのがマズい。書くところが 2 つあると、別のものを書いてしまうことがある$\cdots$

$z = re^{i\theta}$ とするとき、$\overline{z}$ の極形式は? $\overline{z} = re^{-i\theta}$. これは OK. しかし

$$\overline{z} = r\left(\cos\theta - i\sin\theta\right)$$

は正しい等式だが極形式ではない。マイナス $-$ はマズい。

ということもあって、極形式の三角関数バージョンは避けよう、と言ってます。

1.10 演算の幾何学的解釈

和は平行四辺形ルール ($\mathbb{R}^2$ のベクトルと同じ)。

1.10 演算の幾何学的解釈

和は平行四辺形ルール ($\mathbb{R}^2$ のベクトルと同じ)。

積は極形式と相性が良い。積の絶対値は絶対値の積、積の偏角は偏角の和。(本当は「偏角の和は積の偏角である」とすべきかも。)

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \quad (r_1, r_2 > 0, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R})$$

とすると

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = (r_1 r_2)\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

これが $z_1 z_2$ の極形式である。

1.10 演算の幾何学的解釈

和は平行四辺形ルール ($\mathbb{R}^2$ のベクトルと同じ)。

積は極形式と相性が良い。積の絶対値は絶対値の積、積の偏角は偏角の和。(本当は「偏角の和は積の偏角である」とすべきかも。)

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \quad (r_1, r_2 > 0, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R})$$

とすると

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = (r_1 r_2)\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

これが $z_1 z_2$ の極形式である。ゆえに

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|\,, \tag{16}$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \tag{17}$$

第 2 式は注釈が必要。arg は 1 つの数を表すのではないことに注意する。これは

$$\arg(z_1 z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi} \tag{18}$$

のように解釈すべき。

合同式のおさらい

合同式は、普通は、次のように整数の話として習うことが多い。

$a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ とするとき

$$a \equiv b \pmod{m} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad a - b = mk.$$

このとき、a と b は m を法として**合同**である (a and b are congruent modulo m, a is congruent to b modulo m) という。

要するに a, b を m で割ったときの余りが一致する、ということである。

合同式のおさらい

合同式は、普通は、次のように整数の話として習うことが多い。

$a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ とするとき

$$a \equiv b \pmod{m} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad a - b = mk.$$

このとき、a と b は m を法として**合同**である (a and b are congruent modulo m, a is congruent to b modulo m) という。

要するに a, b を m で割ったときの余りが一致する、ということである。

整数の話でない場合も良く使われる。水色の部分が要点である。

合同式のおさらい

合同式は、普通は、次のように整数の話として習うことが多い。

$a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ とするとき

$$a \equiv b \pmod{m} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad a - b = mk.$$

このとき、a と b は **m を法として合同である** (a and b are congruent modulo m, a is congruent to b modulo m) という。

要するに a, b を m で割ったときの余りが一致する、ということである。

整数の話でない場合も良く使われる。水色の部分が要点である。

例えば、前のスライドの (18) は次の意味である。

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) \quad \arg(z_1 z_2) - (\arg z_1 + \arg z_2) = 2k\pi.$$

合同式のおさらい

合同式は、普通は、次のように整数の話として習うことが多い。

$a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ とするとき

$$a \equiv b \pmod{m} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad a - b = mk.$$

このとき、a と b は m を法として**合同**である (a and b are congruent modulo m, a is congruent to b modulo m) という。

要するに a, b を m で割ったときの余りが一致する、ということである。

整数の話でない場合も良く使われる。水色の部分が要点である。

例えば、前のスライドの (18) は次の意味である。

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) \quad \arg(z_1 z_2) - (\arg z_1 + \arg z_2) = 2k\pi.$$

例えば

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$$

ははっきり間違いである ($-\pi < \operatorname{Arg} \leq \pi$ に注意)。これも

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) \equiv \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \pmod{2\pi}$$

は正しい。

1.10 演算の幾何学的解釈

原点の周りの回転

特に $e^{i\theta}$ をかけると、複素平面で原点を中心とする角度 θ の回転をすることになる。

$z = x + yi \ (x, y \in \mathbb{R})$ とするとき

$$\begin{aligned} e^{i\theta}z = e^{i\theta}(x + yi) &= (\cos\theta + i\sin\theta)(x + yi) \\ &= x\cos\theta - y\sin\theta + (x\sin\theta + y\cos\theta)i. \end{aligned}$$

Cf. (行列を用いた回転)

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

おまけ: 1.9 の補足 (宿題を解くために)

例題　$r, \theta \in \mathbb{R}$, $z = re^{i\theta}$ とするとき、z の極形式を求めよ。

(ひっかけ問題のように思えるかもしれないけれど…意外と大事なこと。)

おまけ: 1.9 の補足 (宿題を解くために)

例題　$r, \theta \in \mathbb{R}$, $z = re^{i\theta}$ とするとき、z の極形式を求めよ。
(ひっかけ問題のように思えるかもしれないけれど…意外と大事なこと。)

解答　$r \geq 0$ の場合は、$z = re^{i\theta}$ は z の極形式である。

おまけ: 1.9 の補足 (宿題を解くために)

例題　$r, \theta \in \mathbb{R}$, $z = re^{i\theta}$ とするとき、z の極形式を求めよ。

(ひっかけ問題のように思えるかもしれないけれど…意外と大事なこと。)

解答　$r \geq 0$ の場合は、$z = re^{i\theta}$ は z の極形式である。

$r < 0$ の場合は、$r = (-r) \cdot (-1) = (-r)e^{i\pi}$ であるから

$$z = re^{i\theta} = (-r)e^{i\pi} \cdot e^{i\theta} = (-r)e^{i(\theta+\pi)}$$

であり、$-r > 0$, $\theta + \pi \in \mathbb{R}$ であるから、$z = (-r)e^{\theta+\pi}$ が z の極形式である。 $\square$

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2021/complex2021.pdf (2014〜).