複素関数・同演習 第2回

〜複素数の定義、複素平面、平方根、共役複素数、絶対値 〜

かつらだ まさし
桂田 祐史

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex2021/

2021年9月22日

目次

本日の内容・連絡事項

- 大まかに講義ノート [1] §1.7 までの内容。
- 今回と次回は、複素数の基本的な演算の話が続く。退屈にならないように動機付け。

  Cardano による 3 次方程式の解の公式は実用性が低いが、それを見ると複素数を考える必要性は分かりやすい。
  - $\Delta > 0$ のときは？ → 虚数の 3 乗根が必要になる (次回解説)。
  - p, q が虚数のときは？ →虚数の平方根が必要になる (今回解説)。
- 今回は宿題 1 を出す。締め切り 9 月 28 日 13:30.

問　高校生のとき

$$\frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)} = \frac{x-yi}{x^2 - x\cdot yi + yi\cdot x - y^2 i^2} = \frac{x-yi}{x^2+y^2}$$

のような計算をしたことがあるだろう。これを $x+yi$ の逆元が $\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}$ であることの証明として採用できるだろうか？

1.1 高校で習ったこと $+\alpha$　前回最後の問の答

問　高校生のとき

$$\frac{1}{x+yi}=\frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)}=\frac{x-yi}{x^2-x\cdot yi+yi\cdot x-y^2i^2}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}$$

のような計算をしたことがあるだろう。これを $x+yi$ の逆元が $\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}$ であることの証明として採用できるだろうか？

答　このままでは採用できない。$x+yi$ の逆元の存在と一意性が証明できていない段階では、$\dfrac{1}{x+yi}$ はナンセンスな式であり、上の計算で分かるのは、「複素数 a, b, c $(b,c\neq 0)$ について $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$」が成り立ち、またもし $x+yi$ の逆元が一意的に存在するならば、それは $\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}$ である、ということくらい。実際に逆元であることを確認する、例えば

$$(x+yi)\left(\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{-y}{x^2+y^2}i\right)=\left(x\frac{x}{x^2+y^2}-y\frac{-y}{x^2+y^2}\right)+\left(x\frac{-y}{x^2+y^2}+y\frac{x}{x^2+y^2}\right)i$$
$$=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}+0\cdot i=1$$

のような計算をすることが必要である。 □

1.2 複素数の定義

3 つの方法の紹介

高校のはいい加減である。ちゃんと定義する方法は色々ある。

1.2 複素数の定義
3 つの方法の紹介

高校のはいい加減である。ちゃんと定義する方法は色々ある。

1. **Hamilton の方法**　$\mathbb{R}^2$ に加法・乗法を

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

で定めると、$(\mathbb{R}^2;+,\cdot)$ は可換体であり、
- 加法についての単位元は $(0,0)$. (x,y) の逆元は $-(x,y)=(-x,-y)$.
- 乗法についての単位元は $(1,0)$. (x,y) の逆元は

$$(x,y)^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

が成り立つ。これを証明するには、可換体の公理を満たすことをチェックするだけ。
この $\mathbb{R}^2$ のことを $\mathbb{C}$ と表す。

普通の数ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ の拡張ととらえると分かりやすいかもしれない。
(a,b) を $a+bi$ と書くことにする。

復習 可換体の公理

K が**可換体**とは、加法について可換群, 加法の単位元 0_K を除いて乗法について可換群、そして分配法則を満たすこと。

復習 可換体の公理

K が**可換体**とは、加法について可換群, 加法の単位元 0_K を除いて乗法について可換群、そして分配法則を満たすこと。

1. $(\forall a, b, c \in K) \quad (a+b)+c = a+(b+c)$
2. $(\exists 0_K \in K)\ (\forall a \in K) \quad a + 0_K = 0_K + a = a$
3. $(\forall a \in K)\ (\exists a' \in K) \quad a + a' = a' + a = 0_K$
4. $(\forall a, b \in K) \quad a + b = b + a$
5. $(\forall a, b, c \in K) \quad (ab)c = a(bc)$
6. $(\exists 1_K \in K)\ (\forall a \in K) \quad a1_K = 1_K a = a$
7. $(\forall a \in K \setminus \{0_K\})\ (\exists a'' \in K) \quad aa'' = a''a = 1_K$
8. $(\forall a, b, c \in K) \quad (a+b)c = ac + bc, \quad a(b+c) = ab + ac$
9. $(\forall a, b \in K) \quad ab = ba$

復習 可換体の公理

K が**可換体**とは、加法について可換群, 加法の単位元 0_K を除いて乗法について可換群、そして分配法則を満たすこと。

1. $(\forall a, b, c \in K) \quad (a+b)+c = a+(b+c)$
2. $(\exists 0_K \in K)\ (\forall a \in K) \quad a + 0_K = 0_K + a = a$
3. $(\forall a \in K)\ (\exists a' \in K) \quad a + a' = a' + a = 0_K$
4. $(\forall a, b \in K) \quad a + b = b + a$
5. $(\forall a, b, c \in K) \quad (ab)c = a(bc)$
6. $(\exists 1_K \in K)\ (\forall a \in K) \quad a1_K = 1_K a = a$
7. $(\forall a \in K \setminus \{0_K\})\ (\exists a'' \in K) \quad aa'' = a''a = 1_K$
8. $(\forall a, b, c \in K) \quad (a+b)c = ac + bc, \quad a(b+c) = ab + ac$
9. $(\forall a, b \in K) \quad ab = ba$

$K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はこの公理を満たす。

復習 可換体の公理

K が**可換体**とは、加法について可換群, 加法の単位元 0_K を除いて乗法について可換群、そして分配法則を満たすこと。

1. $(\forall a, b, c \in K) \quad (a+b)+c = a+(b+c)$
2. $(\exists 0_K \in K)\ (\forall a \in K) \quad a + 0_K = 0_K + a = a$
3. $(\forall a \in K)\ (\exists a' \in K) \quad a + a' = a' + a = 0_K$
4. $(\forall a, b \in K) \quad a + b = b + a$
5. $(\forall a, b, c \in K) \quad (ab)c = a(bc)$
6. $(\exists 1_K \in K)\ (\forall a \in K) \quad a 1_K = 1_K a = a$
7. $(\forall a \in K \setminus \{0_K\})\ (\exists a'' \in K) \quad a a'' = a'' a = 1_K$
8. $(\forall a, b, c \in K) \quad (a+b)c = ac + bc, \quad a(b+c) = ab + ac$
9. $(\forall a, b \in K) \quad ab = ba$

$K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はこの公理を満たす。
$K = \mathbb{H}$ (後で紹介する四元数体) は (1)–(8) を満たすが、(9) は満たさない。

1.2 複素数の定義

3 つの方法の紹介

2. 行列を用いる方法　2 次正方行列全体 $M_2(\mathbb{R})$ の部分集合 $\mathbb{C}$ を

$$\mathbb{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

で定めると、行列の通常の和と積を演算として、$\mathbb{C}$ は可換体になる。

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと、それぞれ $1, i$ に対応し、

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = aI + bJ, \quad J^2 = -I.$$

(後で出て来る $e^{i\theta}$ に対応する行列は、$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (回転の行列) になる。)

1.2 複素数の定義
3 つの方法の紹介

(もしも可換環とそのイデアルについて知識があれば)

3. $\mathbb{C}$ を実係数多項式環 $\mathbb{R}[x]$ を、そのイデアル (x^2+1) で割った剰余環とする:
$$\mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/(x^2+1).$$
(x^2+1) は $\mathbb{R}[x]$ の極大イデアルなので、その剰余環 $\mathbb{C}$ は可換体となる。

1.2 複素数の定義

3 つの方法の紹介

(もしも可換環とそのイデアルについて知識があれば)

3. $\mathbb{C}$ を実係数多項式環 $\mathbb{R}[x]$ を、そのイデアル (x^2+1) で割った剰余環とする:
$$\mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/(x^2+1).$$
(x^2+1) は $\mathbb{R}[x]$ の極大イデアルなので、その剰余環 $\mathbb{C}$ は可換体となる。
代数学知らないと難しい?

(もしも可換環とそのイデアルについて知識があれば)

3. $\mathbb{C}$ を実係数多項式環 $\mathbb{R}[x]$ を、そのイデアル (x^2+1) で割った剰余環とする:
$$\mathbb{C}=\mathbb{R}[x]/(x^2+1).$$
(x^2+1) は $\mathbb{R}[x]$ の極大イデアルなので、その剰余環 $\mathbb{C}$ は可換体となる。
代数学知らないと難しい?…… 一方これは高校数学流の厳密化とも言える。

(もしも可換環とそのイデアルについて知識があれば)

3. $\mathbb{C}$ を実係数多項式環 $\mathbb{R}[x]$ を、そのイデアル (x^2+1) で割った剰余環とする:

$$\mathbb{C}=\mathbb{R}[x]/(x^2+1).$$

(x^2+1) は $\mathbb{R}[x]$ の極大イデアルなので、その剰余環 $\mathbb{C}$ は可換体となる。
代数学知らないと難しい?…… 一方これは高校数学流の厳密化とも言える。

もう少し噛み砕いた説明が読みたければ、飯高 [2] を見よ (ネットでアクセス可能)。

Hamilton (1805–1865) は三元数を探して成功しなかったが、**四元数**(しげんすう) (quaternion) を発見した。

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

(これから $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$ が導かれる。)

$\mathbb{H}$ は実は非可換体である。**四元数体** (the skew field of Hamilton quaternions) と呼ばれる。

最近は結構応用されている。

四元数については、例えば堀 [3], 今野 [4] を見よ。

$\mathbb{C}$ は**順序体**ではない。

1.3 順序その他 (他の体 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, … との比較)

$\mathbb{C}$ は**順序体**ではない。

その代わり (?) 大きなアドバンテージがある: **代数的閉体** (1 次以上の任意の代数方程式がその中に根を持つ $\because$ **代数学の基本定理**が成立) 。

1.3 順序その他 (他の体 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ... との比較)

$\mathbb{C}$ は**順序体**ではない。

その代わり (?) 大きなアドバンテージがある: **代数的閉体** (1 次以上の任意の代数方程式がその中に根を持つ $\because$ **代数学の基本定理**が成立) 。

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ について。

- $\mathbb{Q}$ は可換体かつ順序体だが完備ではない。
- $\mathbb{R}$ は可換体かつ順序体かつ完備であるが、代数的閉体ではない (2 次方程式の解すら存在しないこともある)。
  注: 完備性は解析学にとっては非常に有効
- $\mathbb{C}$ は可換体かつ完備かつ代数的閉体であるが、順序体ではない。

1.3 順序その他 (他の体 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ... との比較)

$\mathbb{C}$ は**順序体**ではない。

その代わり (？) 大きなアドバンテージがある: **代数的閉体** (1 次以上の任意の代数方程式がその中に根を持つ $\because$ **代数学の基本定理**が成立) 。

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ について。

- $\mathbb{Q}$ は可換体かつ順序体だが完備ではない。
- $\mathbb{R}$ は可換体かつ順序体かつ完備であるが、代数的閉体ではない (2 次方程式の解すら存在しないこともある)。
  注: 完備性は解析学にとっては非常に有効
- $\mathbb{C}$ は可換体かつ完備かつ代数的閉体であるが、順序体ではない。

(参考) Hamilton の四元数体 $\mathbb{H}$ は、体ではあるが可換性は成り立たない。順序体でもない。

1.4 複素 (数) 平面, Gauss 平面

2 つ並べて図を描く。
$\mathbb{C}$ は拡張 $\mathbb{R}^2$ だから、本質的には座標平面の話と同じ。「実軸」,「虚軸」

1.5 平方根　定義

定義 2.1 (複素数の平方根)

複素数 c に対して、$z^2 = c$ を満たす複素数 $z \in \mathbb{C}$ を c の**平方根** (square root of c) とよぶ。

注意: 平方根と $\sqrt{\quad}$ の区別が重要。$\mathbb{R}$ では簡単だった (説明できますか？この後のスライドで復習する。)。
$\mathbb{C}$ では？$\sqrt{c}$ という記号については後回し。まずは平方根。

定理 2.2 (複素数の平方根)

任意の複素数 c に対して、c の平方根 z が存在する。$c=0$ のときは $z=0$ のみ、$c\neq 0$ のときは c の平方根はちょうど 2 つ存在 (互いに他方の -1 倍)。

定理 2.2 (複素数の平方根)

任意の複素数 c に対して、c の平方根 z が存在する。$c=0$ のときは $z=0$ のみ、$c\neq 0$ のときは c の平方根はちょうど 2 つ存在 (互いに他方の -1 倍)。$c=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ とするとき

$$
(1)\qquad z=\begin{cases}\pm\sqrt{a} & (a\geq 0,\ b=0)\\ \pm\sqrt{-a}\,i & (a<0,\ b=0)\\ \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\ i\right) & (b\neq 0).\end{cases}
$$

定理 2.2 (複素数の平方根)

任意の複素数 c に対して、c の平方根 z が存在する。$c=0$ のときは $z=0$ のみ、$c\neq 0$ のときは c の平方根はちょうど 2 つ存在 (互いに他方の -1 倍)。$c=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ とするとき

$$(1)\qquad z=\begin{cases}\pm\sqrt{a} & (a\geq 0,\ b=0)\\ \pm\sqrt{-a}\,i & (a<0,\ b=0)\\ \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\ i\right) & (b\neq 0).\end{cases}$$

(ここに現れた $\sqrt{\quad}$ は、非負実数に対する非負の平方根である。)

定理 2.2 (複素数の平方根)

任意の複素数 c に対して、c の平方根 z が存在する。$c=0$ のときは $z=0$ のみ、$c\neq 0$ のときは c の平方根はちょうど 2 つ存在 (互いに他方の -1 倍)。$c=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ とするとき

$$
(1)\qquad z=\begin{cases}\pm\sqrt{a} & (a\geq 0,\ b=0)\\ \pm\sqrt{-a}\,i & (a<0,\ b=0)\\ \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\,i\right) & (b\neq 0).\end{cases}
$$

(ここに現れた $\sqrt{}$ は、非負実数に対する非負の平方根である。)

この式は覚えないで (間違える可能性が高いから)、求め方を覚えて、必要なときに求められるようにしておくのを勧める。

例 2.3

$z^2 = 1 - i$ を満たす複素数 z を求めよ ($1 - i$ の平方根を求めよ)。

例 2.3

$z^2 = 1 - i$ を満たす複素数 z を求めよ ($1 - i$ の平方根を求めよ)。
(解答)
$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とおくと、$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ であるから

$$z^2 = 1 - i \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = 1 \wedge 2xy = -1.$$

1.5 平方根　平方根の求め方をマスター

例 2.3

$z^2 = 1 - i$ を満たす複素数 z を求めよ ($1 - i$ の平方根を求めよ)。

(解答)

$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とおくと、$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ であるから

$$z^2 = 1 - i \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = 1 \wedge 2xy = -1.$$

$2xy = -1$ より $y = -\frac{1}{2x}$. これを $x^2 - y^2 = 1$ に代入して

$$4x^4 - 4x^2 - 1 = 0.$$

例 2.3

$z^2 = 1 - i$ を満たす複素数 z を求めよ ($1 - i$ の平方根を求めよ)。

(解答)

$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とおくと、$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ であるから

$$z^2 = 1 - i \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = 1 \wedge 2xy = -1.$$

$2xy = -1$ より $y = -\frac{1}{2x}$. これを $x^2 - y^2 = 1$ に代入して

$$4x^4 - 4x^2 - 1 = 0.$$

$x \in \mathbb{R}$ であるから $x^2 \geq 0$ であることに注意すると (2 次方程式を解いて)

$$x^2 = \frac{2 + \sqrt{2^2 + 4}}{4} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{4}.$$

例 2.3

$z^2 = 1 - i$ を満たす複素数 z を求めよ ($1 - i$ の平方根を求めよ)。
(解答)
$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とおくと、$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ であるから

$$z^2 = 1 - i \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = 1 \wedge 2xy = -1.$$

$2xy = -1$ より $y = -\frac{1}{2x}$. これを $x^2 - y^2 = 1$ に代入して

$$4x^4 - 4x^2 - 1 = 0.$$

$x \in \mathbb{R}$ であるから $x^2 \geq 0$ であることに注意すると (2 次方程式を解いて)

$$x^2 = \frac{2 + \sqrt{2^2 + 4}}{4} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{4}.$$

ゆえに

$$x = \pm \frac{\sqrt{2\sqrt{2} + 2}}{2}.$$

例 2.3 (つづき)

これから

$$y = -\frac{1}{2x} = \mp \frac{2}{2\sqrt{2\sqrt{2}+2}} = \mp \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}+2}} = \mp \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}.$$

ただし x, y を表す式の複号はすべて同順である。ゆえに

$$z = x + yi = \pm\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2} - \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}i\right).$$

1.5 平方根　実数の平方根と $\sqrt{\quad}$

中学校で次のことを学んだ。

1.5 平方根　実数の平方根と $\sqrt{\quad}$

中学校で次のことを学んだ。

1. $c \in \mathbb{R}$ に対して $x^2 = c$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ が存在するためには、$c \geq 0$ であることが必要十分である。

1.5 平方根　実数の平方根と $\sqrt{\ }$

中学校で次のことを学んだ。

1. $c \in \mathbb{R}$ に対して $x^2 = c$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ が存在するためには、$c \geq 0$ であることが必要十分である。
2. $c \geq 0$ のとき、x の平方根 x で $x \geq 0$ を満たすものはただ 1 つ存在する。
   それを $\sqrt{c}$ と表す。

1.5 平方根　実数の平方根と $\sqrt{}$

中学校で次のことを学んだ。

1. $c \in \mathbb{R}$ に対して $x^2 = c$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ が存在するためには、$c \geq 0$ であることが必要十分である。
2. $c \geq 0$ のとき、x の平方根 x で $x \geq 0$ を満たすものはただ 1 つ存在する。
   それを $\sqrt{c}$ と表す。
3. $c = 0$ であれば c の平方根は 0 のみで、$\sqrt{c} = 0$.

1.5 平方根　実数の平方根と $\sqrt{\ }$

中学校で次のことを学んだ。

1. $c \in \mathbb{R}$ に対して $x^2 = c$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ が存在するためには、$c \geq 0$ であることが必要十分である。
2. $c \geq 0$ のとき、x の平方根 x で $x \geq 0$ を満たすものはただ 1 つ存在する。
   それを $\sqrt{c}$ と表す。
3. $c = 0$ であれば c の平方根は 0 のみで、$\sqrt{c} = 0$.
4. $c > 0$ であれば c の平方根は $\sqrt{c}$ と $-\sqrt{c}$ の 2 つ。

1.5 平方根　実数の平方根と $\sqrt{}$

中学校で次のことを学んだ。

1. $c \in \mathbb{R}$ に対して $x^2 = c$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ が存在するためには、$c \geq 0$ であることが必要十分である。
2. $c \geq 0$ のとき、x の平方根 x で $x \geq 0$ を満たすものはただ 1 つ存在する。
   それを $\sqrt{c}$ と表す。
3. $c = 0$ であれば c の平方根は 0 のみで、$\sqrt{c} = 0$.
4. $c > 0$ であれば c の平方根は $\sqrt{c}$ と $-\sqrt{c}$ の 2 つ。
5. 任意の $c_1, c_2 \geq 0$ に対して

$$\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1 c_2}.$$

1.5 平方根　実数の平方根と $\sqrt{\quad}$

中学校で次のことを学んだ。

1. $c \in \mathbb{R}$ に対して $x^2 = c$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ が存在するためには、$c \geq 0$ であることが必要十分である。
2. $c \geq 0$ のとき、x の平方根 x で $x \geq 0$ を満たすものはただ 1 つ存在する。
   それを $\sqrt{c}$ と表す。
3. $c = 0$ であれば c の平方根は 0 のみで、$\sqrt{c} = 0.$
4. $c > 0$ であれば c の平方根は $\sqrt{c}$ と $-\sqrt{c}$ の 2 つ。
5. 任意の $c_1, c_2 \geq 0$ に対して
$$\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1 c_2}.$$

高校では、$c < 0$ に対して、$\sqrt{c} := \sqrt{-c}\ i$ と定義した (例えば $\sqrt{-1} = i$, $\sqrt{-3} = \sqrt{3}i$). この講義では、この定義は採用しないことにする。

中学校で学んだ $\sqrt{\text{非負実数}}$ という記号は使い続けるが、
高校で学んだ $\sqrt{\text{負数}}$ という記号は断りなしに使わない。

1.5 平方根　演習

1. 任意の $c_1, c_2 \geq 0$ に対して $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1 c_2}$ であることを示せ。
2. 負の実数 c に対して $\sqrt{c} := \sqrt{-c}\, i$ と定義した場合、$\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1 c_2}$ とは限らないことを示せ。

(解答はこのスライド PDF の最後に置いておく。)

1.5 平方根 (5) 関数論における $\sqrt{\quad}$ (事故多発地点)

1.5 平方根 (5) 関数論における $\sqrt{\quad}$ (事故多発地点)

$c \geq 0$ のときは、特に断りのない限り、$\sqrt{c}$ は c の非負の平方根を表すことにする (これまで通り)。

1.5 平方根 (5) 関数論における $\sqrt{\quad}$ (事故多発地点)

$c \geq 0$ のときは、特に断りのない限り、$\sqrt{c}$ は c の非負の平方根を表すことにする (これまで通り)。

それ以外の場合は、$\sqrt{c}$ が何を表すかは、そのとき考えている問題に応じて決める (言い換えると一般的な定義はしない)。

$c \geq 0$ のときは、特に断りのない限り、$\sqrt{c}$ は c の非負の平方根を表すことにする (これまで通り)。

それ以外の場合は、$\sqrt{c}$ が何を表すかは、そのとき考えている問題に応じて決める (言い換えると一般的な定義はしない)。

色々な場合がある。

- (a) $\sqrt{c}$ で c の平方根のうちの特定の 1 つを (何かルールを決めて) 表す。
- (b) $\sqrt{c}$ で c の平方根のうちのどちらかを表す (どちらであるか具体的なルールは決めない)。
- (c) $\sqrt{c}$ で c の平方根の両方を表す。

1.5 平方根 (5) 関数論における $\sqrt{\quad}$ (事故多発地点)

$c \geq 0$ のときは、特に断りのない限り、$\sqrt{c}$ は c の非負の平方根を表すことにする (これまで通り)。

それ以外の場合は、$\sqrt{c}$ が何を表すかは、そのとき考えている問題に応じて決める (言い換えると一般的な定義はしない)。

色々な場合がある。

(a) $\sqrt{c}$ で c の平方根のうちの特定の 1 つを (何かルールを決めて) 表す。
(b) $\sqrt{c}$ で c の平方根のうちのどちらかを表す (どちらであるか具体的なルールは決めない)。
(c) $\sqrt{c}$ で c の平方根の両方を表す。

例えば $\sqrt{-3}$ は $\sqrt{3}\, i$ かもしれないし、$-\sqrt{3}\, i$ かもしれないし、$\pm\sqrt{3}i$ の両方を指しているかもしれない。

1.5 平方根 (5) 関数論における $\sqrt{\quad}$ (事故多発地点)

$c \geq 0$ のときは、特に断りのない限り、$\sqrt{c}$ は c の非負の平方根を表すことにする (これまで通り)。

それ以外の場合は、$\sqrt{c}$ が何を表すかは、そのとき考えている問題に応じて決める (言い換えると一般的な定義はしない)。

色々な場合がある。

(a) $\sqrt{c}$ で c の平方根のうちの特定の 1 つを (何かルールを決めて) 表す。
(b) $\sqrt{c}$ で c の平方根のうちのどちらかを表す (どちらであるか具体的なルールは決めない)。
(c) $\sqrt{c}$ で c の平方根の両方を表す。

例えば $\sqrt{-3}$ は $\sqrt{3}\,i$ かもしれないし、$-\sqrt{3}\,i$ かもしれないし、$\pm\sqrt{3}i$ の両方を指しているかもしれない。

次の 2 次方程式の解の公式では、$\sqrt{\quad}$ は $\pm\sqrt{\quad}$ という形で現れるので、どれを採用しても同じ内容を表すことになる。

1.5 平方根　2 次方程式

系 2.4 (複素係数 2 次方程式)

$a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ とする。2 次方程式 $az^2 + bz + c = 0$ の解は

(2) $$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

ここで $\sqrt{b^2 - 4ac}$ は $b^2 - 4ac$ の平方根のどれかを表すとする (2 つある場合、どちらを選んでも、z は同じものを表す)。
$D := b^2 - 4ac$ とするとき、$D \neq 0$ なら 2 つ, $D = 0$ ならば 1 つ (重根)。

1.5 平方根　2 次方程式

系 2.4 (複素係数 2 次方程式)

$a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ とする。2 次方程式 $az^2 + bz + c = 0$ の解は

(2)
$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

ここで $\sqrt{b^2 - 4ac}$ は $b^2 - 4ac$ の平方根のどれかを表すとする (2 つある場合、どちらを選んでも、z は同じものを表す)。
$D := b^2 - 4ac$ とするとき、$D \neq 0$ なら 2 つ, $D = 0$ ならば 1 つ (重根)。

証明 (実係数 2 次方程式のときと同様に、平方完成を行って移項すると)

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

系 2.4 (複素係数 2 次方程式)

$a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ とする。2 次方程式 $az^2 + bz + c = 0$ の解は

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{2}$$

ここで $\sqrt{b^2 - 4ac}$ は $b^2 - 4ac$ の平方根のどれかを表すとする (2 つある場合、どちらを選んでも、z は同じものを表す)。
$D := b^2 - 4ac$ とするとき、$D \neq 0$ なら 2 つ, $D = 0$ ならば 1 つ (重根)。

証明 (実係数 2 次方程式のときと同様に、平方完成を行って移項すると)

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

$b^2 - 4ac$ の平方根のうちの任意の 1 つを $\sqrt{b^2 - 4ac}$ と表すとき、$\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ の平方根は $\pm\dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. $\left(\because \left(\pm\dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = \dfrac{\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2} = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$

1.5 平方根　2次方程式

系 2.4 (複素係数 2 次方程式)

$a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ とする。2 次方程式 $az^2 + bz + c = 0$ の解は

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{2}$$

ここで $\sqrt{b^2 - 4ac}$ は $b^2 - 4ac$ の平方根のどれかを表すとする (2 つある場合、どちらを選んでも、z は同じものを表す)。
$D := b^2 - 4ac$ とするとき、$D \neq 0$ なら 2 つ, $D = 0$ ならば 1 つ (重根)。

証明 (実係数 2 次方程式のときと同様に、平方完成を行って移項すると)

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

$b^2 - 4ac$ の平方根のうちの任意の 1 つを $\sqrt{b^2 - 4ac}$ と表すとき、$\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ の平方根は
$\pm\dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. $\left(\because \left(\pm\dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = \dfrac{\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2} = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$
ゆえに $z + \dfrac{b}{2a} = \pm\dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. 移項して z が求まる。 □

1.6 共役複素数　定義と基本的性質

(3) $$z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

の**共役複素数** (the complex conjugate of z) $\overline{z}$ を次式で定める。

(4) $$\overline{z} := x - yi$$

1.6 共役複素数　定義と基本的性質

(3)
$$z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

の**共役複素数** (the complex conjugate of z) $\overline{z}$ を次式で定める。

(4)
$$\overline{z} := x - yi$$

一般に以下が成立する

(5)
$$\overline{\overline{z}} = z.$$

1.6 共役複素数　定義と基本的性質

(3) $$z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

の**共役複素数** (the complex conjugate of z) $\overline{z}$ を次式で定める。

(4) $$\overline{z} := x - yi$$

一般に以下が成立する

(5) $$\overline{\overline{z}} = z.$$

(6) $$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}.$$

(3 つ目は $z = x + yi$, $w = u + iv$ と置いて証明。4 つ目は 3 つ目を利用する。)

1.6 共役複素数　定義と基本的性質

(3) $$z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

の**共役複素数** (the complex conjugate of z) $\overline{z}$ を次式で定める。

(4) $$\overline{z} := x - yi$$

一般に以下が成立する

(5) $$\overline{\overline{z}} = z.$$

(6) $$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}.$$

(3 つ目は $z = x + yi$, $w = u + iv$ と置いて証明。4 つ目は 3 つ目を利用する。)

(7) $$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i} \text{ すなわち } \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

ゆえに、x, y で表せるものは、$z, \overline{z}$ で表せる。

(3)
$$z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$$
の**共役複素数** (the complex conjugate of z) $\overline{z}$ を次式で定める。

(4)
$$\overline{z} := x - yi$$
一般に以下が成立する

(5)
$$\overline{\overline{z}} = z.$$

(6)
$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}.$$
(3 つ目は $z = x + yi$, $w = u + iv$ と置いて証明。4 つ目は 3 つ目を利用する。)

(7)
$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i} \text{ すなわち } \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$
ゆえに、x, y で表せるものは、$z, \overline{z}$ で表せる。

(8)
$$z = \overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}.$$

1.6 共役複素数　実係数多項式の根

高校数学で次のような問題はおなじみ。

- $1+2i$ が $ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。
- $1+2i$ が $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。

1.6 共役複素数　実係数多項式の根

高校数学で次のような問題はおなじみ。

- $1+2i$ が $ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。
- $1+2i$ が $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。

定理 2.5 (実係数多項式の根の共役複素数も根)

$n\in\mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n\in\mathbb{R}$ に対して $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ と置く。
$c\in\mathbb{C}$ が $f(c)=0$ を満たすならば、$f(\overline{c})=0$.

1.6 共役複素数　実係数多項式の根

高校数学で次のような問題はおなじみ。

- $1+2i$ が $ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。
- $1+2i$ が $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。

定理 2.5 (実係数多項式の根の共役複素数も根)

$n\in\mathbb{N}$, a_0, a_1, ..., $a_n\in\mathbb{R}$ に対して $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ と置く。$c\in\mathbb{C}$ が $f(c)=0$ を満たすならば、$f\left(\overline{c}\right)=0$.

証明

$$\overline{f(z)}=\overline{a_0z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}$$

高校数学で次のような問題はおなじみ。

- $1+2i$ が $ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。
- $1+2i$ が $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。

定理 2.5 (実係数多項式の根の共役複素数も根)

$n\in\mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n\in\mathbb{R}$ に対して $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ と置く。
$c\in\mathbb{C}$ が $f(c)=0$ を満たすならば、$f\left(\overline{c}\right)=0$.

証明

$$\begin{aligned}\overline{f(z)} &= \overline{a_0z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}\\ &= \overline{a_0}\,\overline{z^n}+\overline{a_1}\,\overline{z^{n-1}}+\cdots+\overline{a_{n-1}}\;\overline{z}+\overline{a_n}\end{aligned}$$

1.6 共役複素数　実係数多項式の根

高校数学で次のような問題はおなじみ。

- $1+2i$ が $ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。
- $1+2i$ が $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。

定理 2.5 (実係数多項式の根の共役複素数も根)

$n\in\mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n\in\mathbb{R}$ に対して $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ と置く。
$c\in\mathbb{C}$ が $f(c)=0$ を満たすならば、$f\left(\overline{c}\right)=0$.

証明

$$
\begin{aligned}
\overline{f(z)} &= \overline{a_0z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n} \\
&= \overline{a_0}\,\overline{z^n}+\overline{a_1}\,\overline{z^{n-1}}+\cdots+\overline{a_{n-1}}\;\overline{z}+\overline{a_n} \\
&= \overline{a_0}\left(\overline{z}\right)^n+\overline{a_1}\left(\overline{z}\right)^{n-1}+\cdots+\overline{a_{n-1}}\;\overline{z}+\overline{a_n}
\end{aligned}
$$

1.6 共役複素数　実係数多項式の根

高校数学で次のような問題はおなじみ。

- $1+2i$ が $ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。
- $1+2i$ が $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。

定理 2.5 (実係数多項式の根の共役複素数も根)

$n\in\mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n\in\mathbb{R}$ に対して $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ と置く。
$c\in\mathbb{C}$ が $f(c)=0$ を満たすならば、$f\left(\overline{c}\right)=0$.

証明

$$
\begin{aligned}
\overline{f(z)} &= \overline{a_0z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n} \\
&= \overline{a_0}\,\overline{z^n}+\overline{a_1}\,\overline{z^{n-1}}+\cdots+\overline{a_{n-1}}\ \overline{z}+\overline{a_n} \\
&= \overline{a_0}\left(\overline{z}\right)^n+\overline{a_1}\left(\overline{z}\right)^{n-1}+\cdots+\overline{a_{n-1}}\ \overline{z}+\overline{a_n} \\
&= a_0\left(\overline{z}\right)^n+a_1\left(\overline{z}\right)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\overline{z}+a_n
\end{aligned}
$$

1.6 共役複素数　実係数多項式の根

高校数学で次のような問題はおなじみ。

- $1+2i$ が $ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。
- $1+2i$ が $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。

定理 2.5 (実係数多項式の根の共役複素数も根)

$n\in\mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n\in\mathbb{R}$ に対して $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ と置く。
$c\in\mathbb{C}$ が $f(c)=0$ を満たすならば、$f(\overline{c})=0$.

証明

$$\begin{aligned}
\overline{f(z)} &= \overline{a_0z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}\\
&= \overline{a_0}\,\overline{z^n}+\overline{a_1}\,\overline{z^{n-1}}+\cdots+\overline{a_{n-1}}\;\overline{z}+\overline{a_n}\\
&= \overline{a_0}\left(\overline{z}\right)^n+\overline{a_1}\left(\overline{z}\right)^{n-1}+\cdots+\overline{a_{n-1}}\;\overline{z}+\overline{a_n}\\
&= a_0\left(\overline{z}\right)^n+a_1\left(\overline{z}\right)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\overline{z}+a_n\\
&= f\left(\overline{z}\right)
\end{aligned}$$

が成り立つので

1.6 共役複素数　実係数多項式の根

高校数学で次のような問題はおなじみ。

- $1+2i$ が $ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。
- $1+2i$ が $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ の解ならば、$1-2i$ も解である。

定理 2.5 (実係数多項式の根の共役複素数も根)

$n\in\mathbb{N}$, a_0, a_1, ..., $a_n\in\mathbb{R}$ に対して $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ と置く。
$c\in\mathbb{C}$ が $f(c)=0$ を満たすならば、$f(\overline{c})=0$.

証明

$$
\begin{aligned}
\overline{f(z)} &= \overline{a_0z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n} \\
&= \overline{a_0}\,\overline{z^n}+\overline{a_1}\,\overline{z^{n-1}}+\cdots+\overline{a_{n-1}}\,\overline{z}+\overline{a_n} \\
&= \overline{a_0}\left(\overline{z}\right)^n+\overline{a_1}\left(\overline{z}\right)^{n-1}+\cdots+\overline{a_{n-1}}\,\overline{z}+\overline{a_n} \\
&= a_0\left(\overline{z}\right)^n+a_1\left(\overline{z}\right)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\overline{z}+a_n \\
&= f\left(\overline{z}\right)
\end{aligned}
$$

が成り立つので

$$
f(c)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \overline{f(c)}=0 \quad\Leftrightarrow\quad f\left(\overline{c}\right)=0. \qquad \square
$$

1.7 絶対値

$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ の**絶対値** (absolute value, modulus, magnitude) $|z|$ を次式で定義する。

$$|z| = |x + yi| := \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{9}$$

1.7 絶対値

$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ の**絶対値** (absolute value, modulus, magnitude) $|z|$ を次式で定義する。

(9)
$$|z| = |x + yi| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

これは、対応する $\mathbb{R}^2$ の要素 (数ベクトル) (x, y) の普通の大きさ (長さ, ノルム) と同じである。

1.7 絶対値

$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ の**絶対値** (absolute value, modulus, magnitude) $|z|$ を次式で定義する。

(9) $$|z| = |x + yi| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

これは、対応する $\mathbb{R}^2$ の要素 (数ベクトル) (x, y) の普通の大きさ (長さ, ノルム) と同じである。

(10) $$|-z| = |z|, \quad |\bar{z}| = |z| \quad (\text{図を描いてみる}),$$

1.7 絶対値

$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ の**絶対値** (absolute value, modulus, magnitude) $|z|$ を次式で定義する。

(9) $$|z| = |x + yi| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

これは、対応する $\mathbb{R}^2$ の要素 (数ベクトル) (x, y) の普通の大きさ (長さ, ノルム) と同じである。

(10) $$|-z| = |z|, \quad |\overline{z}| = |z| \quad (\text{図を描いてみる}),$$

さらに

(11) $$z\overline{z} = |z|^2$$

が成り立つ。

1.7 絶対値

$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ の**絶対値** (absolute value, modulus, magnitude) $|z|$ を次式で定義する。

(9) $$|z| = |x + yi| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

これは、対応する $\mathbb{R}^2$ の要素 (数ベクトル) (x, y) の普通の大きさ (長さ, ノルム) と同じである。

(10) $$|-z| = |z|, \quad |\overline{z}| = |z| \quad (\text{図を描いてみる}),$$

さらに

(11) $$z\overline{z} = |z|^2$$

が成り立つ。実際

$$z\overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = |z|^2.$$

1.7 絶対値

$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ の**絶対値** (absolute value, modulus, magnitude) $|z|$ を次式で定義する。

(9)
$$|z| = |x + yi| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

これは、対応する $\mathbb{R}^2$ の要素 (数ベクトル) (x, y) の普通の大きさ (長さ, ノルム) と同じである。

(10)
$$|-z| = |z|, \quad |\overline{z}| = |z| \quad (\text{図を描いてみる}),$$

さらに

(11)
$$z\overline{z} = |z|^2$$

が成り立つ。実際

$$z\overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = |z|^2.$$

ゆえに $z \neq 0$ ならば

(12)
$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

1.7 絶対値

定理 2.6 (絶対値の性質)

1. $|z| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow z = 0$.
2. $|z + w| \leq |z| + |w|$
3. $|zw| = |z|\ |w|$. (系として、$w \neq 0$ のとき $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$)
4. $|z - w| \geq \big||z| - |w|\big|$.

1.7 絶対値

定理 2.6 (絶対値の性質)

1. $|z| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow z = 0$.
2. $|z + w| \leq |z| + |w|$
3. $|zw| = |z|\ |w|$. (系として、$w \neq 0$ のとき $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$)
4. $|z - w| \geq \big||z| - |w|\big|$.

証明

1. $\mathbb{R}^2$ のノルムについての「$\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」と同じ。

定理 2.6 (絶対値の性質)

1. $|z| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow z = 0$.
2. $|z+w| \leq |z| + |w|$
3. $|zw| = |z|\ |w|$. (系として、$w \neq 0$ のとき $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$)
4. $|z-w| \geq \big||z| - |w|\big|$.

証明

1. $\mathbb{R}^2$ のノルムについての「$\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」と同じ。
2. $\mathbb{R}^2$ のノルムについての「$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$」と同じ。

1.7 絶対値

定理 2.6 (絶対値の性質)

1. $|z| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow z = 0$.
2. $|z + w| \leq |z| + |w|$
3. $|zw| = |z|\ |w|$. (系として、$w \neq 0$ のとき $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$)
4. $|z - w| \geq \big||z| - |w|\big|$.

証明

1. $\mathbb{R}^2$ のノルムについての「$\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」と同じ。
2. $\mathbb{R}^2$ のノルムについての「$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$」と同じ。
3. $z = a + bi$, $w = c + di$ とおいて、左辺&右辺を計算して比較するか、

1.7 絶対値

定理 2.6 (絶対値の性質)

1. $|z| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow z = 0$.
2. $|z + w| \leq |z| + |w|$
3. $|zw| = |z|\ |w|$. (系として、$w \neq 0$ のとき $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$)
4. $|z - w| \geq \big||z| - |w|\big|$.

証明

1. $\mathbb{R}^2$ のノルムについての「$\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」と同じ。
2. $\mathbb{R}^2$ のノルムについての「$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$」と同じ。
3. $z = a + bi$, $w = c + di$ とおいて、左辺&右辺を計算して比較するか、$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\overline{z}\,\overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2 = (|z|\,|w|)^2$ の $\sqrt{\ }$ を取る。

定理 2.6 (絶対値の性質)

1. $|z| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow z = 0$.
2. $|z+w| \leq |z| + |w|$
3. $|zw| = |z|\,|w|$. (系として、$w \neq 0$ のとき $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$)
4. $|z-w| \geq \big||z| - |w|\big|$.

証明

1. $\mathbb{R}^2$ のノルムについての「$\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」と同じ。
2. $\mathbb{R}^2$ のノルムについての「$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$」と同じ。
3. $z = a+bi$, $w = c+di$ とおいて、左辺&右辺を計算して比較するか、$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\overline{z}\,\overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2 = (|z|\,|w|)^2$ の $\sqrt{\ }$ を取る。
4. $|z| = |z-w+w| \leq |z-w| + |w|$ であるから $|z| - |w| \leq |z-w|$.
   z と w を入れ替えて $|w| - |z| \leq |w-z| = |z-w|$.
   まとめると $\big||z| - |w|\big| = \max\{|z|-|w|, |w|-|z|\} \leq |z-w|$. □

宿題1について (提出方法の注意)

宿題 1 を出します。課題文を書いた PDF や、締め切り、提出方法等は Oh-o! Meiji の「レポート」を見て下さい。

注意事項

- 普通の数式として無理なく読み取れる, A4 サイズの PDF, の 2 つが条件です。LaTeX や Word で作成した PDF, 紙に手書きしたものをスキャンした PDF、なんでも受け付けます。(スマホで撮った画像ファイルも一応受け付けますが、なるべくスキャン・アプリで作成した PDF にして下さい)。Word 等で数式の入力方法がよく分からない場合は、無理をせず「手書きしてスキャン」を選んで下さい。
- 出来る限り、ファイル 1 つだけで提出して下さい。
  複数ページになった場合に、1 ページずつの複数ファイルを送って来る人がいますが、添削が意外と面倒です。複数の PDF を 1 つにまとめることは Mac のプレビューで簡単に出来るので、そうしてから提出して下さい。
- レポートの 1 ページ目の上部に学年・組・番号・氏名を記して下さい。

平方根　演習　解答

問

1. 任意の $c_1, c_2 \geq 0$ に対して $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1 c_2}$ であることを示せ。
2. 負の実数 c に対して $\sqrt{c} := \sqrt{-c}\, i$ と定義した場合、$\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1 c_2}$ とは限らないことを示せ。

解答

1. $\left(\sqrt{c_1}\sqrt{c_2}\right)^2 = \left(\sqrt{c_1}\right)^2\left(\sqrt{c_2}\right)^2 = c_1 c_2$. また $\sqrt{c_1} \geq 0$, $\sqrt{c_2} \geq 0$ であるから、$\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} \geq 0$. ゆえに $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1 c_2}$.
2. $c_1 = -1$, $c_2 = -1$ とするとき
$$\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = i \cdot i = -1, \qquad \sqrt{c_1 c_2} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$
であるから $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} \neq \sqrt{c_1 c_2}$. □

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2021/complex2021.pdf (2014〜).

[2] 飯高茂：大学生にきちんと虚数を教えよう — コーシーの定理を教える前に — (第４９回公私立数学系学科懇談会の活動報告), 数学通信, Vol. 15, No. 1, pp. 46–53 (2010 年 3 月 26 日), http://mathsoc.jp/publication/tushin/1501/1501iitaka.pdf.

[3] 堀源一郎：ハミルトンと四元数 人・数の体系・応用, 海鳴社 (2007).

[4] 今野紀雄：四元数, 森北出版 (2016/12/1).