複素関数・同演習 宿題 No. 13 (2021 年 1 月 13 日出題, 2021 年 1 月 19 日 13:30 までに PDF 形式で提出)

__年__ 組____番　氏名______________ (解答は裏面も使用可, A4 レポート用紙に書いても可)

問 13　次の定積分を留数を用いて求めよ。

(1) $I_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}$　(2) $I_2 = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx$　(3) $I_3 = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^4\theta \, d\theta$

問 13 解説

(1) $P(z) := z^6+1,\ Q(z) := 1$ とすると、ともに多項式で、$\deg P(z) = 6 \geq 2 = 0+2 = \deg Q(z)+2$. また任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して、$P(x) = x^6+1 \geq 0+1 = 1$ より $P(x) \neq 0$. ゆえに

$$I_1 = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, c>0} \mathrm{Res}\left(\frac{Qz}{P(z)}; c\right).$$

c が $\dfrac{Q}{P}$ の極 $\Leftrightarrow P(c) = 0 \Leftrightarrow c^6 = -1 \Leftrightarrow c = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{6}} \quad (k = 0, 1, \cdots, 6) \Leftrightarrow c = \dfrac{\pm\sqrt{3}+i}{2}, \pm i, \dfrac{\pm\sqrt{3}-i}{2}$.

いずれも P の 1 位の零点で、$\mathrm{Im}\, c > 0$ であるものは、$c = \dfrac{\pm\sqrt{3}+i}{6}, i$.

$$\mathrm{Res}\left(\frac{Q}{P}; c\right) = \frac{Q(c)}{P'(c)} = \frac{1}{6c^5} = \frac{c}{6c^6} = -\frac{c}{6}.$$

ゆえに

$$I_1 = 2\pi i \times \left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2} + i + \frac{-\sqrt{3}+i}{2}\right) = \frac{2\pi i}{-6} \cdot (-2i) = \frac{2\pi}{3}.$$

(2) 被積分関数は偶関数であるから、

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2} dx.$$

$P(z) := (z^2+1)^2,\ Q(z) := 1,\ a = 1$ とおくと、$a > 0,\ \deg P(z) = 4 \geq 1 = 0+1 = \deg Q(z)+1$, 任意の実数 x に対して $P(x) \geq (0+1)^2 = 1$ であるから $P(x) \neq 0$. ゆえに

$$I_2 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(x)}{P(x)} e^{iax}\, dx = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, c>0} \mathrm{Res}\left(\frac{Q(z)}{P(z)} e^{iaz}; c\right)\right).$$

$$P(c) = \Leftrightarrow (c^2+1)^2 = 0 \Leftrightarrow c = \pm i.$$

どちらも P の 2 位の零点であるから、$\frac{Q}{P}$ の高々2 位の極 (実は 2 位の極)、$\mathrm{Im}\, c > 0$ であるものは $c = i$.

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}; i\right) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i}\left((z-i)^2 \cdot \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\right)' = \left((z+i)^{-2} \cdot e^{iz}\right)'\Big|_{z=i}$$
$$= \left(-2(z+i)^{-3} + i(z+i)^{-2}\right)e^{iz}\Big|_{z=i} = -\frac{i}{2}e^{-1}.$$

ゆえに

$$I_2 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(2\pi i \cdot \frac{-i}{2}e^{-1}\right) = \frac{\pi}{2e}.$$

(3) $z = e^{i\theta}\ (\theta \in [0, 2\pi])$ とおくと、$dz = ie^{i\theta}d\theta$ であるから、$d\theta = \dfrac{dz}{ie^{i\theta}} = \dfrac{dz}{iz}$.

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+1/z}{2} = \frac{z^2+1}{2z}.$$

留数定理を用いて

$$I_3 = \int_{|z|=1}\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^4 \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{1}{16i}\int_{|z|=1} \frac{(z^2+1)^4}{z^5} dz = \frac{1}{16i} \cdot 2\pi i \sum_{|c|<1} \mathrm{Res}\left(\frac{(z^2+1)^4}{z^5}; c\right)$$
$$= \frac{\pi}{8} \cdot \mathrm{Res}\left(\frac{z^8+4z^6+6z^4+4z^2+1}{z^5}; 0\right) = \frac{\pi}{8} \cdot 6 = \frac{3\pi}{4}. \blacksquare$$