2020年度複素関数・同演習期末レポート課題

桂田 祐史

2021年1月24日 12:00公開

問題は2ページ目以降にある。

- 締め切りは 1 月 27 日 (水) 12:30、Oh-o! Meiji で提出すること。
(なるべく1月26日までに解答し、疑問点があればなるべくその日のうちにメール (katurada の後に、あっとまーく meiji どっと ac どっと jp) で質問すること。
  - 1/24 18:00 までに届いたものは、1/25 0:00 までに回答する。
  - 1/25 18:00 までに届いたものは、1/26 0:00 までに回答する。
  - 1/26 18:00 までに届いたものは、1/27 0:00 までに回答する。
  - 1/27 0:00 までに届いたものは、1/28 8:00 までに回答する。
- ネットワーク、サーバーの障害なども、連絡して下さい。締め切りの延長などの措置を取る可能性があります。
- 1/25(月曜) 12:30〜13:30 に Zoom でも質問を受け付ける (参加方法は、学期中の Zoom オフィスアワーと同じ、シラバスの補足に書いてある)。
- 質問に対する回答のうち主なものは、授業 WWW サイト http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/ で公開する。
- レポートは A4 サイズの PDF で提出すること。最初のページの一番上に学年・組・番号 (学生番号ではない 1〜2 桁の数) ・氏名を記入すること。ページ番号をつけること。数式が正しく鮮明に表記される限り、PDF の作成方法は問わない (手書き、TEX, Word, …何でも良い)。なるべく単一の PDF で提出することが望ましいが、サイズが 30MB を超えるものは複数のファイルに分割して “追加提出” して構わない。
- 大問の解答はひとまとめにすること。(例えば **2** の (1) と **2** の (2) を離れた場所に書いたりせず、1 箇所にまとめる。)
- 講義資料、参考書、ネットの情報など、何を参考にしても構わない。
- 計算結果の確認にコンピューターを使っても良い。計算の途中経過・根拠も適当にレポートに書くこと (ポイントとなることが書いてあれば、最終結果が間違っていても中間点をつける場合がある)。
- 提出締め切りまでは、問題の内容について、私 (桂田祐史) 以外の人に質問・相談しないこと。人に伝えないこと。
- 記号等は授業で説明したものであれば、断りなく用いて構わない。授業で説明していない記号を用いる場合は、その定義を記すこと。
- 特に指示のない限り、授業で証明した定理は証明抜きに用いて良い (授業内容のコピー&ペーストをする必要はない)。授業中に説明していない定理を用いるときは、証明してから用いること。

1∼5 は必修問題である。**6A**, **6B** のいずれか一方を選択し、合計 6 問の解答をレポートせよ。(7 問以上は解答しないこと。)

1. $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ に対し、z^2 を計算して、z の極形式, z^{24}, $\mathrm{Log}\, z$ を求めよ (極形式以外は $a+bi$, あるいは a あるいは bi $(a, b \in \mathbb{R})$, いずれかの形に表せ)。i は虚数単位を表す。

2. (1) 正則関数 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ の実部 u, 虚部 v について、$u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ が成り立つとき、v を求めよ。結果だけでなく根拠を述べること。　(2) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $f(x+yi) = e^x(\sin y + i\cos y)$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$ で定める。f の微分可能性について論ぜよ。

3. (1) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{3^n}(z-4)^{5n}$ の収束円を求めよ。結果だけでなく、根拠も省略なく書くこと。　(2) 複素数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$, $c \in \mathbb{C}$ に対して

$$C_1 := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \text{ が収束する} \right\}, \quad C_2 := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z-c)^n \text{ が収束する} \right\}$$

とおく。C_1 と C_2 の関係について述べよ。$C_1 \neq C_2$ であるような冪級数の例を示せ。

4. $f(z) = \dfrac{5z^4 - 29z^3 + 39z^2 + 18z - 25}{z^3 - 7z^2 + 15z - 9}$ について、以下の問に答えよ。(答えだけでなく、根拠も書くこと。)

(1) 3 のまわりの f の Laurent 展開とそれが収束する円環領域、主部、$\mathrm{Res}(f;3)$ を求めよ。また 3 は f の何位の極か。

(2) f の 0 のまわりの Laurent 展開、$\mathrm{Res}(f;0)$ を求めよ。

(3) 円環領域 $A(1;2,+\infty)$ における f の Laurent 展開を求めよ。

5. 次の定積分を留数を用いて求めよ。(1) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{x^6+1}\, dx$　(2) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{-ix}}{(x^2+1)^2}\, dx$

(3) n を自然数とするとき $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^n \theta \, d\theta$　(ヒント: 二項定理)

6A. p, Ω, f を $p(z) := e^z - 1$ $(z \in \mathbb{C})$, $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid p(z) \neq 0\}$, $f(z) := \dfrac{z}{p(z)}$ $(z \in \Omega)$ で定めるとき、以下の問に答えよ。

(1) p のすべての零点とその位数を求めよ。(2) $\displaystyle\lim_{z\to 0} f(z)$ を求めよ。(3) $\widetilde{f}\colon \Omega \cup \{0\} \to \mathbb{C}$ を

$$\widetilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & (z \in \Omega) \\ \displaystyle\lim_{w\to 0} f(w) & (z = 0) \end{cases}$$

で定めるとき、$\widetilde{f}$ は 0 のまわりで $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ と冪級数展開できることを示し、その収束半径と、最初の 3 項の係数 a_0, a_1, a_2 を求めよ。

6B. z の多項式 $p(z)$, $q(z)$ が条件 $\deg p(z) \geq \deg q(z) + 2$ を満たすとき、$f(z) := \dfrac{q(z)}{p(z)}$ とおくと、f のすべての留数の和は 0 であることを証明せよ。条件 $\deg p(z) \geq \deg q(z) + 2$ の代わりに $\deg p(z) \geq \deg q(z) + 1$ とした場合はどうか。