複素関数・同演習 第27回

～説明し残っている有名定理～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2020年1月19日

目次

本日の内容・連絡事項

- 期末レポート課題については、前回説明しました (要点: 課題文発表が 1 月 24 日 (日)12:00, 提出は Oh-o! Meiji で、締切は 1 月 27 日 (水)12:30)。
- 関数論の有名な定理で紹介していないものを説明する。講義ノート [1] の §9.3, 9.4, §10.4 の内容である。
    1. Liouville の定理と代数学の基本定理
    2. Riemann の除去可能特異点定理, Casorati-Weierstrass の定理, 孤立特異点の lim による特徴づけ
- 宿題 13 の解説をする。
- 第 28 回 (第 14 回複素関数演習) は、講義を行いません。オフィスアワーの時間延長 (1 月 20 日 (水)15:00–18:00) に替えさせてもらいます。

9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

定義 27.1

$\mathbb{C}$ 全体で正則な関数を**整関数** (entire function) と呼ぶ。

例えば、多項式関数, e^z, $\cos z$, $\sin z$ は整関数である。

定理 27.2 (Liouville の定理)

有界な整関数は定数関数である。

証明

$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は正則で、ある実数 M が存在して

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad |f(z)| \le M$$

を満たすとする。
正則性の仮定より、f は原点で冪級数展開出来て、その収束半径は $+\infty$ である。すなわち、ある複素数列 $\{a_n\}_{n\ge 0}$ が存在して

(1)
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{C}).$$

9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

証明 (つづき).

任意の正の数 R, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta.$$

ゆえに

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=R}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta|^{n+1}}|d\zeta| \le \frac{M}{2\pi R^{n+1}}\int_{|\zeta|=R}|d\zeta| = \frac{M}{R^n}.$$

(これを Cauchy の評価式と呼ぶ。)
$R \to +\infty$ として $|a_n| \le 0$. ゆえに $a_n = 0$.
(1) に代入して

$$f(z) = a_0 \quad (z \in \mathbb{C}).$$

ゆえに f は定数関数である。 □

9.4 Liouville の定理と代数学の基本定理

定理 27.3 (代数学の基本定理)

$P(z)$ が複素係数多項式で、次数が 1 以上ならば、$P(z)$ は少なくとも 1 つの複素数の根を持つ。

(因数定理と帰納法によって、$P(z)$ は次数に等しい個数の 1 次因子の積に因数分解できる。)

証明.

背理法を用いる。$P(z)$ が根を持たない、すなわち

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad P(z) \neq 0$$

を満たすと仮定する。すると

$$f(z) := \frac{1}{P(z)} \quad (z \in \mathbb{C})$$

で定義した f は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。
実は f は有界である。実際、$\lim_{z \to \infty} |P(z)| = +\infty$ であるから、ある実数 R が存在して

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad |P(z)| \geq 1.$$

証明 (つづき).

ゆえに

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad |f(z)| \leq 1.$$

一方、$|f|$ は $\mathbb{C}$ 全体で連続であるから、有界閉集合 $\overline{D}(0; R)$ における $|f|$ の最大値 M が存在する。$M' := \max\{1, M\}$ とおくと

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad |f(z)| \leq M'.$$

以上より、f は有界な整関数であるから、Liouville の定理によって、f は定数関数である。ゆえに P も定数関数である。これは $P(z)$ が次数 1 以上の多項式であることに矛盾する。 □

上で用いた $\lim_{z\to\infty} |P(z)| = +\infty$ の証明は分かるだろうか。当たり前に感じる？しかし、例えば $\lim_{z\to\infty} |e^z| = \infty$ は成り立たない。念のため $\lim_{z\to\infty} |P(z)| = +\infty$ を証明しておこう。

補題 27.4 (多項式の $z \to \infty$ のときの漸近挙動)

$n \in \mathbb{N}$, $f(z) = a_0 z^n + \cdots + a_{n-1} z + a_n$ $(a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C},\ a_0 \neq 0)$ とするとき

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists R \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad (1-\varepsilon)|a_0||z|^n \leq |f(z)| \leq (1+\varepsilon)|a_0||z|^n.$$

証明.

$z \to \infty$ のとき

$$\frac{f(z)}{a_0 z^n} = 1 + \frac{a_1}{a_0 z} + \cdots + \frac{a_n}{a_0 z^n} \to 1.$$

ゆえに

$$\frac{|f(z)|}{|a_0 z^n|} \to 1.$$

ゆえに任意の正の数 ε に対して、ある実数 R が存在して

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R) \quad \left| \frac{|f(z)|}{|a_0 z^n|} - 1 \right| < \varepsilon.$$

これから

$$(1-\varepsilon)|a_0||z|^n \leq |f(z)| \leq (1+\varepsilon)|a_0||z|^n.$$

9.5 平均値の定理と最大値原理

定理 27.5 (平均値の定理 (the mean-value property))

Ω は $\mathbb{C}$ の領域で、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in \Omega$ とするとき、$\overline{D}(c;r) \subset \Omega$ を満たす任意の $r > 0$ に対して

$$f(c) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(c + re^{i\theta})d\theta.$$

(右辺は、円周 $|z-c| = r$ における f の平均値であることに注意)

証明.

Cauchy の積分公式を用い、積分路を $\zeta = c + re^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ とパラメーターづけすると

$$\begin{aligned} f(c) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - c}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(c + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} \cdot ire^{i\theta}\ d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(c + re^{i\theta})d\theta. \quad \square \end{aligned}$$

$\square$

定理 27.6 (最大値原理 (the maximnum principle, maximum-modulus theorem))

Ω は $\mathbb{C}$ の領域、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$z_0 \in \Omega$,

$$(\forall z \in \Omega) \quad |f(z)| \le |f(z_0)| \quad (|f(z_0)| \text{ は } |f| \text{ の最大値である、ということ})$$

が成り立つならば、f は定数関数である。
(正則関数の絶対値が、ある内点で最大値を取れば、その関数は実は定数関数である。)

証明

$M := |f(z_0)|$ とおく。
Ω は開集合であるから、$(\exists \varepsilon > 0)\ D(z_0;\varepsilon) \subset \Omega$. $\rho := \varepsilon/2$ とおくと、$\overline{D}(z_0;\rho) \subset \Omega$.
$0 < r \le \rho$ なる任意の r に対して、平均値の定理から

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta.$$

ゆえに

$$M = |f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(z_0 + re^{i\theta})\right| d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\, d\theta = M.$$

9.5 平均値の定理と最大値原理

証明 (続き)

左辺と右辺が一致したから、不等号はすべて等号である。特に

$$\int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\theta.$$

$\left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| \le M$ で、$\theta \mapsto \left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right|$ は連続であるから

$$\left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| = M \quad (\theta \in [0, 2\pi]).$$

すなわち $|f(z)| = M$ $(|z - z_0| = r)$.
($\because$ どこか 1 点 θ_0 で $\left| f(z_0 + re^{i\theta_0}) \right| < M$ であれば、連続性から十分小さな近傍で $\left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right| < M$). すると上の等式は成り立たなくなり矛盾が生じる。

r の任意性から $|f(z) = M|$ $(|z - z_0| \le \rho)$.
ゆえに f 自身が $D(z_0; \rho)$ で定数関数 C に等しい ($\because$ Cauchy-Riemman のところで「絶対値が定数ならば関数自身が定数」を示した)。
一致の定理により Ω 全体で $f = C$. □

余談: 実は調和関数についても、平均値の定理と最大値原理が成り立ち、様々な応用がある。

定理 27.7 (Riemann の除去可能特異点定理)

$c \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$, $f \colon \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - c| < \varepsilon\} \to \mathbb{C}$ は正則かつ有界とする。このとき c は f の除去可能特異点である。

証明

仮定より、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して

$$(\forall z \in \mathbb{C} : 0 < |z - c| < \varepsilon) \quad |f(z)| \le M.$$

f が $A(c; 0, \varepsilon)$ で正則なことから、ある複素数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が存在して

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - c)^n} \quad (z \in A(c; 0, \varepsilon)).$$

そして、任意の $n \in \mathbb{Z}$ と $0 < r < \varepsilon$ を満たす任意の r に対して

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta.$$

10.4.1 Riemann の除去可能特異点定理

証明.

証明 (つづき) ゆえに

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta-c|=r}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-c|^{n+1}}|d\zeta| \le \frac{M}{2\pi r^{n+1}}\int_{|\zeta-c|=r}|d\zeta| = \frac{M}{r^n}.$$

特に $n\in\mathbb{N}$ のとき

$$|a_{-n}| \le \frac{M}{r^{-n}} = Mr^n \quad (0<r<\varepsilon).$$

$r\to 0$ とすると $|a_{-n}|=0$. ゆえに $a_{-n}=0$. ゆえに f の c における Laurent 展開の主部は 0 である。すなわち c は f の除去可能特異点である。 □

Liouville の定理の証明と並べてみると、類似点が分かって面白く感じられるかもしれない。

10.4.2 Casorati-Weierstrass の定理

定理 27.8 (Casorati-Weierstrass)

c が f の孤立真性特異点ならば

$$(\forall\beta\in\mathbb{C})(\exists\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}})((\forall\in\mathbb{N})z_n\neq c)\wedge\lim_{n\to\infty}z_n=c\wedge\lim_{n\to\infty}f(z_n)=\beta.$$

特に $\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}} f(z)$ は確定しない。

証明

$\beta\in\mathbb{C}$ とする。次を示せば良い。

$$(\star)\qquad (\forall\varepsilon>0)(\forall r\in(0,R))(\exists z\in A(c;0,r))\quad |f(z)-\beta|<\varepsilon$$

($(\star)$ を示せば良いことの確認: $n=1,2,\cdots$ に対して、$\varepsilon=r=\min\{\frac{1}{n},R\}$ として用いると、

$$(\exists z_n):0<|z_n-c|<\frac{1}{n}\wedge|f(z_n)-\beta|<\frac{1}{n}.$$

こうして作った $\{z_n\}$ に対して、$n\to\infty$ のとき $z_n\to c$ かつ $f(z_n)\to\beta$ が成り立つ。)
(つづく)

10.4.2 Casorati-Weierstrass の定理

証明 (続き)

$(\star)$ を背理法で示す。それが成り立たない、すなわち

$$(\exists\varepsilon > 0)(\exists r \in (0, R))(\forall z \in A(c; 0, r)) \quad |f(z) - \beta| \geq \varepsilon$$

と仮定する。

$$(*) \qquad g(z) := \frac{1}{f(z) - \beta} \quad (z \in A(c; 0, r))$$

とおくと、g は $A(c; e, r)$ で正則であり (分母が 0 にならないから)、また $g(z) \neq 0$. 特に c は g の孤立特異点である。さらに $|g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ が成り立つので、Riemann の除去可能特異点定理によって、c は g の除去可能特異点である。ゆえに g は $D(c; r)$ で正則であるように拡張できる。
$(*)$ を $f(z)$ について解く。

$$f(z) = \beta + \frac{1}{g(z)} \quad (z \in A(c; 0, r)).$$

10.4.2 Casorati-Weierstrass の定理

証明 (続き).

場合分けする。

(i) $g(c) \neq 0$ ならば c は f の除去可能特異点である。

(ii) $g(c) = 0$ ならば、c は g の零点である。その位数を k とすると、c は f の k 位の極である。

どちらも、c が f の真性特異点であることに矛盾する。 □

10.4.3 孤立特異点の lim による特徴づけ

定理 27.9 (孤立特異点の lim による特徴づけ)

c が f の孤立特異点とするとき、次の (1), (2), (3) が成立する。

1. c が f の除去可能特異点 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}} f(z)$ は収束。すなわち $(\exists A\in\mathbb{C})$ $\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}} f(z)=A$.
2. c が f の極 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}} f(z)=\infty$.
3. c が f の真性特異点 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}} f(z)$ は収束しないし、∞ に発散もしない。

証明.

(1), (2) の $\Rightarrow$ は証明済みである (比較的簡単)。Casorati-Weierstrass の定理により、(3) の $\Rightarrow$ が成立することも分かった。任意の孤立特異点は、除去可能特異点、極、真性特異点のいずれかであるので、(1), (2), (3) の $\Leftarrow$ が成立する。 □

Cf. 分類になっているとき、$\Rightarrow$ から $\Leftarrow$ が導かれる、という論法は、次の定理の証明でも使える。
実係数の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ について、$D:=b^2-4ac$ とおくとき

- $D>0 \Leftrightarrow$ 2 つの相異なる実根を持つ。
- $D=0 \Leftrightarrow$ 1 つの実根 (重根) を持つ。
- $D<0 \Leftrightarrow$ 2 つの相異なる虚根を持つ。

以上で、例年説明していることはほぼすべて説明できた。

長い話、最後まで視聴してくれた人、お疲れさまです。

「複素関数・同演習」の後に

- この先の関数論について。キーワードくらい。

  留数定理のさらなる応用、*Riemann* 球面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, *Riemann* の写像定理、楕円関数、代数関数、*Riemann* 面、特殊関数、多変数関数論、佐藤超函数論、などなど

  関数論はなかなか広大。

- 現象数理学科には「応用複素関数」という科目がある。上に書いた関数論の続きというよりは、応用事例の紹介が主な内容である (「コンピューター数理」の科目)。留数定理による級数の和の計算、流体のポテンシャル流、ポテンシャル問題、等角写像の数値計算、数値積分の誤差解析、佐藤の超函数の紹介、などなど (毎年迷いながらやっている)。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2020/complex2020.pdf (2014〜).