

複素関数・同演習 第26回

～定積分計算への留数の応用～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2020年1月13日

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 定積分計算への留数の応用
 - 有理関数の \mathbb{R} 上の積分
 - 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分
 - 三角関数の有理関数の周期積分
- 3 参考文献

- 定積分計算への留数の応用について説明する。
(講義ノート [1] の §13 の内容で、そちらは他にも色々書いてあるが、この前回と今回の授業で説明したことだけマスターすれば十分。)
- 宿題 **13** を出します (提出締め切りは 2021 年 1 月 19 日 13:30)。
- 期末レポート課題を出します。詳しいことは「複素関数期末レポートについて」を見て下さい。

13.1 有理関数の \mathbb{R} 上の積分

次の定理は前回紹介済みである。証明が残っている。

定理 25.3 (有理関数の \mathbb{R} 上の積分 (再掲))

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$, $(\forall x \in \mathbb{R}) P(x) \neq 0$
とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f; c).$$

ここで $\sum_{\operatorname{Im} c > 0}$ は、 f の極 c のうち、 $\operatorname{Im} c > 0$ を満たすものすべてについての和
を取ることを意味する。

13.1 有理関数の \mathbb{R} 上の積分

証明

仮定からある定数 $M, R^*(\geq 1)$ が存在して次式が成り立つ。

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R^*) \quad P(z) \neq 0 \wedge |f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}.$$

13.1 有理関数の \mathbb{R} 上の積分

証明

仮定からある定数 $M, R^*(\geq 1)$ が存在して次式が成り立つ。

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R^*) \quad P(z) \neq 0 \wedge |f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}.$$

(証明: $P(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n, a_0 \neq 0, Q(z) = b_0 z^m + \cdots + b_m, b_0 \neq 0$ とする。仮定から $n - m \geq 2$ である。

$$|z^{n-m} f(z)| = \left| z^{n-m} \frac{Q(z)}{P(z)} \right| = \left| z^{n-m} \frac{b_0 z^m + \cdots + b_m}{a_0 z^n + \cdots + a_n} \right| \rightarrow \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \quad (z \rightarrow \infty)$$

が分かる

13.1 有理関数の \mathbb{R} 上の積分

証明

仮定からある定数 $M, R^*(\geq 1)$ が存在して次式が成り立つ。

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R^*) \quad P(z) \neq 0 \wedge |f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}.$$

(証明: $P(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n, a_0 \neq 0, Q(z) = b_0 z^m + \cdots + b_m, b_0 \neq 0$ とする。仮定から $n - m \geq 2$ である。

$$|z^{n-m} f(z)| = \left| z^{n-m} \frac{Q(z)}{P(z)} \right| = \left| z^{n-m} \frac{b_0 z^m + \cdots + b_m}{a_0 z^n + \cdots + a_n} \right| \rightarrow \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \quad (z \rightarrow \infty)$$

が分かるから、 $M := 2 \left| \frac{b_0}{a_0} \right|$ とおくと、ある $R^*(\geq 1)$ が存在して

$$|z^{n-m} f(z)| \leq M \quad (|z| \geq R^*).$$

13.1 有理関数の \mathbb{R} 上の積分

証明

仮定からある定数 $M, R^*(\geq 1)$ が存在して次式が成り立つ。

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R^*) \quad P(z) \neq 0 \wedge |f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}.$$

(証明: $P(z) = a_0 z^n + \cdots + a_n, a_0 \neq 0, Q(z) = b_0 z^m + \cdots + b_m, b_0 \neq 0$ とする。仮定から $n - m \geq 2$ である。

$$|z^{n-m} f(z)| = \left| z^{n-m} \frac{Q(z)}{P(z)} \right| = \left| z^{n-m} \frac{b_0 z^m + \cdots + b_m}{a_0 z^n + \cdots + a_n} \right| \rightarrow \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \quad (z \rightarrow \infty)$$

が分かるから、 $M := 2 \left| \frac{b_0}{a_0} \right|$ とおくと、ある $R^*(\geq 1)$ が存在して

$$|z^{n-m} f(z)| \leq M \quad (|z| \geq R^*).$$

ゆえに

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^{n-m}} \leq \frac{M}{|z|^2} \quad (|z| \geq R^*)$$

が成り立つ。)

13.1 有理関数の \mathbb{R} 上の積分

証明 (つづき)

ゆえに積分は絶対収束し

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx. \quad (\text{一般には } \lim_{R_1, R_2 \rightarrow +\infty} \int_{-R_1}^{R_2} \text{ だけど...})$$

13.1 有理関数の \mathbb{R} 上の積分

証明 (つづき)

ゆえに積分は絶対収束し

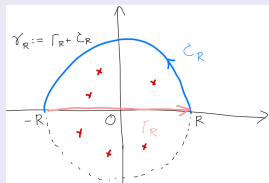
$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx. \quad (\text{一般には } \lim_{R_1, R_2 \rightarrow +\infty} \int_{-R_1}^{R_2} \text{ だけど...})$$

$$\Gamma_R: z = x \quad (x \in [-R, R]),$$

$$C_R: z = Rr^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi]),$$

$$\gamma_R := \Gamma_R + C_R$$

とおく。



13.1 有理関数の \mathbb{R} 上の積分

証明 (つづき)

ゆえに積分は絶対収束し

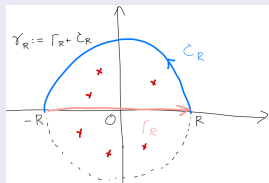
$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx. \quad (\text{一般には } \lim_{R_1, R_2 \rightarrow +\infty} \int_{-R_1}^{R_2} \text{ だけど...})$$

$$\Gamma_R: z = x \quad (x \in [-R, R]),$$

$$C_R: z = Rr^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi]),$$

$$\gamma_R := \Gamma_R + C_R$$

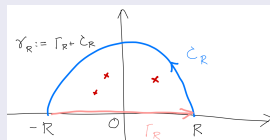
とおく。



$R \geq R^*$ を満たす任意の R に対して、 P の零点は $|z| < R$ に含まれる。 $\text{Im } c > 0$ を満たす零点 c は γ_R の内部に含まれる。

13.1 有理関数の \mathbb{R} 上の積分

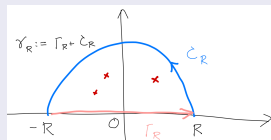
証明 (つづき)



$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{\Gamma_R} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz.$$

13.1 有理関数の \mathbb{R} 上の積分

証明 (つづき)

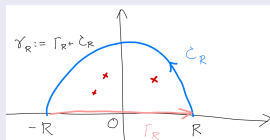


$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{\Gamma_R} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz.$$

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |f(z)| |dz| \leq \frac{M}{R^2} \int_{C_R} |dz| = \frac{M}{R^2} \cdot \pi R = \frac{\pi M}{R} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty).$$

13.1 有理関数の \mathbb{R} 上の積分

証明 (つづき)



$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{\Gamma_R} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz.$$

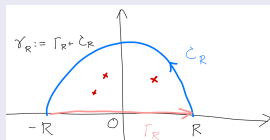
$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |f(z)| |dz| \leq \frac{M}{R^2} \int_{C_R} |dz| = \frac{M}{R^2} \cdot \pi R = \frac{\pi M}{R} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty).$$

留数定理より

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f; c).$$

13.1 有理関数の \mathbb{R} 上の積分

証明 (つづき)



$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{\Gamma_R} f(z) dz + \int_{\zeta_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\zeta_R} f(z) dz.$$

$$\left| \int_{\zeta_R} f(z) dz \right| \leq \int_{\zeta_R} |f(z)| |dz| \leq \frac{M}{R^2} \int_{\zeta_R} |dz| = \frac{M}{R^2} \cdot \pi R = \frac{\pi M}{R} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty).$$

留数定理より

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f; c).$$

ゆえに

$$\int_{-R}^R f(x) dx = \int_{\gamma_R} f(z) dz - \int_{\zeta_R} f(z) dz \rightarrow 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f; c) \quad (R \rightarrow +\infty). \quad \square$$

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

f を有理関数とするとき、指数関数を含んだ積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx$$

の計算についての定理を紹介する。この場合は (有理関数の定積分とは異なり)、原始関数を求めることが難しいことが多い。非常にありがたい定理である。

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

f を有理関数とするとき、指数関数を含んだ積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx$$

の計算についての定理を紹介する。この場合は (有理関数の定積分とは異なり)、原始関数を求めることが難しいことが多い。非常にありがたい定理である。

これは応用上非常に重要な Fourier 変換、逆 Fourier 変換

$$(\mathcal{F}) \quad \hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx \quad (\xi \in \mathbb{R}),$$

$$(\mathcal{F}^*) \quad \tilde{g}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{ix\xi} d\xi \quad (x \in \mathbb{R})$$

を求めることに利用できる。

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

f を有理関数とするとき、指数関数を含んだ積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx$$

の計算についての定理を紹介する。この場合は (有理関数の定積分とは異なり)、原始関数を求めることが難しいことが多い。非常にありがたい定理である。

これは応用上非常に重要な Fourier 変換、逆 Fourier 変換

$$(\mathcal{F}) \quad \widehat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx \quad (\xi \in \mathbb{R}),$$

$$(\mathcal{F}^*) \quad \widetilde{g}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{ix\xi} d\xi \quad (x \in \mathbb{R})$$

を求めることに利用できる。

念のため:

$$(\forall a \in \mathbb{R}) \quad \overline{e^{iax}} = e^{-iax}, \quad \cos(ax) = \operatorname{Re} e^{iax}, \quad \sin(ax) = \operatorname{Im} e^{iax}, \quad |e^{iax}| = 1$$

を思い出しておこう。

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

定理 26.1 (有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$, $(\forall x \in \mathbb{R}) P(x) \neq 0$,
 $a > 0$ とするとき、

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}; c).$$

ここで $\sum_{\operatorname{Im} c > 0}$ は、 f の極 (あるいは $f(z)e^{iaz}$ の極と言っても同じこと) c のうち、 $\operatorname{Im} c > 0$ を満たすものすべてについての和を取ることを意味する。

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

定理 26.1 (有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$, $(\forall x \in \mathbb{R}) P(x) \neq 0$,
 $a > 0$ とするとき、

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f(z)e^{iaz}; c).$$

ここで $\sum_{\text{Im } c > 0}$ は、 f の極 (あるいは $f(z)e^{iaz}$ の極と言っても同じこと) c のうち、 $\text{Im } c > 0$ を満たすものすべてについての和を取ることを意味する。

証明

定理 25.3 の証明と同様にして、ある定数 $M, R^*(\geq 1)$ が存在して次式が成り立つ。

$$(\forall z \in \mathbb{C} : |z| \geq R^*) \quad P(z) \neq 0 \wedge |f(z)| \leq \frac{M}{|z|}.$$

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

証明 (つづき)

任意の $A, B > R^*$ に対して、曲線 $C_{\text{下}}, C_{\text{右}}, C_{\text{上}}, C_{\text{左}}, C_{\text{AB}}$ を次のように定める。

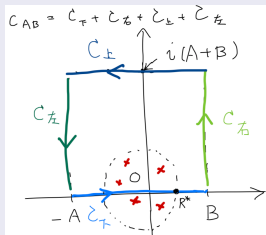
$$C_{\text{下}}: z = x \quad (x \in [-A, B]),$$

$$C_{\text{右}}: z = B + iy \quad (y \in [0, A+B]),$$

$$C_{\text{上}}: z = -x + i(A+B) \quad (x \in [-B, A]),$$

$$C_{\text{左}}: z = -A - iy \quad (y \in [-(A+B), 0]),$$

$$C_{\text{AB}} := C_{\text{下}} + C_{\text{右}} + C_{\text{上}} + C_{\text{左}}.$$



13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

証明 (つづき)

任意の $A, B > R^*$ に対して、曲線 $C_{\text{下}}, C_{\text{右}}, C_{\text{上}}, C_{\text{左}}, C_{AB}$ を次のように定める。

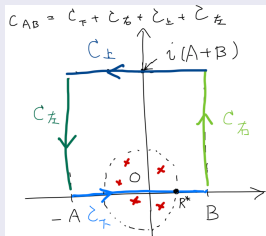
$$C_{\text{下}}: z = x \quad (x \in [-A, B]),$$

$$C_{\text{右}}: z = B + iy \quad (y \in [0, A+B]),$$

$$C_{\text{上}}: z = -x + i(A+B) \quad (x \in [-B, A]),$$

$$C_{\text{左}}: z = -A - iy \quad (y \in [-(A+B), 0]),$$

$$C_{AB} := C_{\text{下}} + C_{\text{右}} + C_{\text{上}} + C_{\text{左}}.$$



P の零点は $|z| < R^*$ に含まれ、実軸上にはないので、 C_{AB} の内部にある (周上にはない)。

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

証明 (つづき)

任意の $A, B > R^*$ に対して、曲線 $C_{\text{下}}, C_{\text{右}}, C_{\text{上}}, C_{\text{左}}, C_{AB}$ を次のように定める。

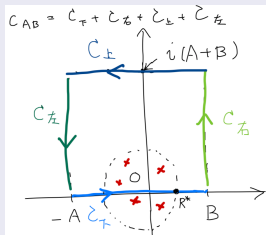
$$C_{\text{下}}: z = x \quad (x \in [-A, B]),$$

$$C_{\text{右}}: z = B + iy \quad (y \in [0, A+B]),$$

$$C_{\text{上}}: z = -x + i(A+B) \quad (x \in [-B, A]),$$

$$C_{\text{左}}: z = -A - iy \quad (y \in [-(A+B), 0]),$$

$$C_{AB} := C_{\text{下}} + C_{\text{右}} + C_{\text{上}} + C_{\text{左}}.$$



P の零点は $|z| < R^*$ に含まれ、実軸上にはないので、 C_{AB} の内部にある (周上にはない)。ゆえに留数定理によって

$$\int_{C_{AB}} f(z)e^{iax} dz = 2\pi i \sum_{\text{Im } c > 0} \text{Res}(f(z)e^{iaz}; c).$$

(つづく)

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

証明 (つづき)

$C_{\text{下}}$ に沿う積分は

$$\int_{C_{\text{下}}} f(z)e^{iaz} dz = \int_{-A}^B f(x)e^{iax} dx.$$

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

証明 (つづき)

$C_{\text{下}}$ に沿う積分は

$$\int_{C_{\text{下}}} f(z)e^{iaz} dz = \int_{-A}^B f(x)e^{iax} dx.$$

$C_{\text{右}}$ で

$$|z| = \sqrt{B^2 + y^2} \geq B, \quad |f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \leq \frac{M}{B},$$

$$\operatorname{Re}(iaz) = \operatorname{Re}[ia(B + iy)] = -ay, \quad \left| e^{iaz} \right| = e^{\operatorname{Re}(iaz)} = e^{-ay}$$

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

証明 (つづき)

$C_{\text{下}}$ に沿う積分は

$$\int_{C_{\text{下}}} f(z)e^{iaz} dz = \int_{-A}^B f(x)e^{iax} dx.$$

$C_{\text{右}}$ で

$$|z| = \sqrt{B^2 + y^2} \geq B, \quad |f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \leq \frac{M}{B},$$

$$\operatorname{Re}(iaz) = \operatorname{Re}[ia(B + iy)] = -ay, \quad \left| e^{iaz} \right| = e^{\operatorname{Re}(iaz)} = e^{-ay}$$

であるから

$$\left| \int_{C_{\text{右}}} f(z)e^{iaz} \right| \leq \frac{M}{B} \int_0^{A+B} e^{-ay} dy \leq \frac{M}{B} \int_0^{\infty} e^{-ay} dy = \frac{M}{aB}.$$

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

証明 (つづき)

$C_{\text{下}}$ に沿う積分は

$$\int_{C_{\text{下}}} f(z)e^{iaz} dz = \int_{-A}^B f(x)e^{iax} dx.$$

$C_{\text{右}}$ で

$$|z| = \sqrt{B^2 + y^2} \geq B, \quad |f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \leq \frac{M}{B},$$

$$\operatorname{Re}(iaz) = \operatorname{Re}[ia(B + iy)] = -ay, \quad \left| e^{iaz} \right| = e^{\operatorname{Re}(iaz)} = e^{-ay}$$

であるから

$$\left| \int_{C_{\text{右}}} f(z)e^{iaz} \right| \leq \frac{M}{B} \int_0^{A+B} e^{-ay} dy \leq \frac{M}{B} \int_0^{\infty} e^{-ay} dy = \frac{M}{aB}.$$

$C_{\text{左}}$ もほぼ同様にして

$$\left| \int_{C_{\text{左}}} f(z)e^{iaz} \right| \leq \frac{M}{aA}.$$

(つづく)

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

証明 (つづき)

C_{\pm} では

$$|z| = \sqrt{(-x)^2 + (A+B)^2} \geq A+B, \quad |f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \leq \frac{M}{A+B},$$

$$\operatorname{Re}(iaz) = \operatorname{Re}[ia(-x + i(A+B))] = -a(A+B), \quad |e^{iaz}| = e^{-a(A+B)},$$

$$\left| \int_{C_{\pm}} f(z)e^{iaz} dz \right| \leq \frac{M}{A+B} \int_{-A}^B e^{-a(A+B)} dx = Me^{-a(A+B)}.$$

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

証明 (つづき)

C_{\pm} では

$$|z| = \sqrt{(-x)^2 + (A+B)^2} \geq A+B, \quad |f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \leq \frac{M}{A+B},$$

$$\operatorname{Re}(iaz) = \operatorname{Re}[ia(-x + i(A+B))] = -a(A+B), \quad |e^{iaz}| = e^{-a(A+B)},$$

$$\left| \int_{C_{\pm}} f(z)e^{iaz} dz \right| \leq \frac{M}{A+B} \int_{-A}^B e^{-a(A+B)} dx = Me^{-a(A+B)}.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} I &= \lim_{A, B \rightarrow +\infty} \int_{-A}^B f(x)e^{iax} dx = \lim_{A, B \rightarrow +\infty} \left(\int_{C_{AB}} - \int_{C_{\text{右}}} - \int_{C_{\text{上}}} - \int_{C_{\text{左}}} \right) \\ &= \lim_{A, B \rightarrow +\infty} \left(2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}; c) - \int_{C_{\text{右}}} - \int_{C_{\text{左}}} - \int_{C_{\text{上}}} \right) \\ &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f(z)e^{iaz}; c). \quad (\text{注: 広義積分の収束も同時に証明できている}) \quad \square \end{aligned}$$

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

次の注意は細かいので、講義では軽く触れるにとどめる。

注意 1 (定理 26.1 の仮定と証明法について)

仮定 $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$ は、定理 25.3 の条件 ($\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$) より弱い。

強い条件 $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 2$ を仮定した場合は (そういうテキストが少なくない)、 $a \geq 0$ に対して (つまり $a = 0$ も OK になる) 広義積分が絶対収束であることも簡単に示せるし、積分路として、定理 25.3 の証明で用いた簡単な $\gamma_R = \Gamma_R + C_R$ が採用できる。また

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0$$

の証明も

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^\pi e^{-aR \sin \theta} d\theta = 0$$

に帰着され、簡単である ($0 < e^{-aR \sin \theta} \leq 1$ より $0 < \int_0^\pi e^{-aR \sin \theta} d\theta \leq \pi$ が導かれる)。

Cf. $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ は発散、 $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ は絶対収束、 $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ は条件収束 (絶対収束しない)。

□

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

次の系は細かいようであるが、Fourier 変換への応用を考えると重要である。
上で述べた定理 26.1 の証明を検討すると、 $a \leq 0$ のときは、(1) が成立しないことが分かる。 $a < 0$ の場合は、代わりに次が成り立つ。

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

次の系は細かいようであるが、Fourier 変換への応用を考えると重要である。

上で述べた定理 26.1 の証明を検討すると、 $a \leq 0$ のときは、(1) が成立しないことが分かる。 $a < 0$ の場合は、代わりに次が成り立つ。

系 26.2 ($a < 0$ の場合の公式)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$, $(\forall x \in \mathbb{R}) P(x) \neq 0$,

$a < 0$ とするとき、

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx = -2\pi i \sum_{\text{Im } c < 0} \text{Res}(f(z)e^{iaz}; c).$$

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

次の系は細かいようであるが、Fourier 変換への応用を考えると重要である。

上で述べた定理 26.1 の証明を検討すると、 $a \leq 0$ のときは、(1) が成立しないことが分かる。 $a < 0$ の場合は、代わりに次が成り立つ。

系 26.2 ($a < 0$ の場合の公式)

$P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$, $\deg P(z) \geq \deg Q(z) + 1$, $(\forall x \in \mathbb{R}) P(x) \neq 0$,

$a < 0$ とするとき、

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax} dx = -2\pi i \sum_{\text{Im } c < 0} \text{Res}(f(z)e^{iaz}; c).$$

しかし、系 26.2 を使うのではなく、計算の工夫により、定理 26.1 に帰着できる例を説明するテキストが多い。これについては、以下の例を見よ。

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

例 26.3

$$(3) \quad (\forall a \in \mathbb{R}) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|a|}.$$

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

例 26.3

$$(3) \quad (\forall a \in \mathbb{R}) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|a|}.$$

$a > 0$ の場合は、定理 26.1 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iaz}}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{(z^2 + 1)'} \right|_{z=i} = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{2z} \right|_{z=i} = \pi e^{-a}.$$

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

例 26.3

$$(3) \quad (\forall a \in \mathbb{R}) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|a|}.$$

$a > 0$ の場合は、定理 26.1 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iaz}}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{(z^2 + 1)'} \right|_{z=i} = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{2z} \right|_{z=i} = \pi e^{-a}.$$

$a = 0$ の場合は、定理 25.3 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{1}{2z} \right|_{z=i} = \pi.$$

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

例 26.3

$$(3) \quad (\forall a \in \mathbb{R}) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|a|}.$$

$a > 0$ の場合は、定理 26.1 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iaz}}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{(z^2 + 1)'} \right|_{z=i} = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{2z} \right|_{z=i} = \pi e^{-a}.$$

$a = 0$ の場合は、定理 25.3 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{1}{2z} \right|_{z=i} = \pi.$$

$a < 0$ のとき、 $e^{iax} = \overline{e^{-iax}}$ 、 $-a > 0$ に注意して、定理 26.1 から

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{e^{-iax}}}{x^2 + 1} dx$$

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

例 26.3

$$(3) \quad (\forall a \in \mathbb{R}) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|a|}.$$

$a > 0$ の場合は、定理 26.1 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iaz}}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{(z^2 + 1)'} \right|_{z=i} = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{2z} \right|_{z=i} = \pi e^{-a}.$$

$a = 0$ の場合は、定理 25.3 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{1}{2z} \right|_{z=i} = \pi.$$

$a < 0$ のとき、 $e^{iax} = \overline{e^{-iax}}$, $-a > 0$ に注意して、定理 26.1 から

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x^2 + 1} dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x^2 + 1} dx}$$

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

例 26.3

$$(3) \quad (\forall a \in \mathbb{R}) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|a|}.$$

$a > 0$ の場合は、定理 26.1 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iaz}}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{(z^2 + 1)'} \right|_{z=i} = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{2z} \right|_{z=i} = \pi e^{-a}.$$

$a = 0$ の場合は、定理 25.3 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{1}{2z} \right|_{z=i} = \pi.$$

$a < 0$ のとき、 $e^{iax} = \overline{e^{-iax}}$, $-a > 0$ に注意して、定理 26.1 から

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x^2 + 1} dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x^2 + 1} dx} = \overline{2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{-iaz}}{z^2 + 1}; i \right)}$$

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

例 26.3

$$(3) \quad (\forall a \in \mathbb{R}) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|a|}.$$

$a > 0$ の場合は、定理 26.1 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iaz}}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{(z^2 + 1)'} \right|_{z=i} = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{2z} \right|_{z=i} = \pi e^{-a}.$$

$a = 0$ の場合は、定理 25.3 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{1}{2z} \right|_{z=i} = \pi.$$

$a < 0$ のとき、 $e^{iax} = \overline{e^{-iax}}$, $-a > 0$ に注意して、定理 26.1 から

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x^2 + 1} dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x^2 + 1} dx} = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{-iaz}}{z^2 + 1}; i \right) = \overline{2\pi i \cdot \frac{e^{-iaz}}{2z} \Big|_{z=i}}$$

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

例 26.3

$$(3) \quad (\forall a \in \mathbb{R}) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|a|}.$$

$a > 0$ の場合は、定理 26.1 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iaz}}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{(z^2 + 1)'} \right|_{z=i} = 2\pi i \left. \frac{e^{iaz}}{2z} \right|_{z=i} = \pi e^{-a}.$$

$a = 0$ の場合は、定理 25.3 から

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 1}; i \right) = 2\pi i \left. \frac{1}{2z} \right|_{z=i} = \pi.$$

$a < 0$ のとき、 $e^{iax} = \overline{e^{-iax}}$, $-a > 0$ に注意して、定理 26.1 から

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x^2 + 1} dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x^2 + 1} dx} = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{-iaz}}{z^2 + 1}; i \right) = \overline{2\pi i \cdot \frac{e^{-iaz}}{2z} \Big|_{z=i}} \\ &= \overline{\pi e^a} = \pi e^a. \end{aligned}$$

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

例 26.3 (つづき)

以上をまとめて (3) を得る。

なお、(3) の実部を取ると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|a|}$$

が得られる。



13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

例 26.3 (つづき)

以上をまとめて (3) を得る。

なお、(3) の実部を取ると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|a|}$$

が得られる。



余談 1 (Mathematica で検算するときに)

Mathematica で計算する際に、 a の符号を教えるには、例えば

```
Assuming[a>0, Integrate[Exp[I a x]/(x^2+1),{x,-Infinity,Infinity}]
```

のようにすれば良い。



13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

例 26.4

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

例 26.4

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

被積分関数が偶関数であることと、 $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$ であることから

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \frac{xe^{ix}}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 + 1} dx.$$

13.2 有理関数 $\times e^{iax}$ の \mathbb{R} 上の積分

例 26.4

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

被積分関数が偶関数であることと、 $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$ であることから

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \frac{xe^{ix}}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 + 1} dx.$$

$P(z) := z^2 + 1$, $Q(z) := z$, $a := 1$ とすると、定理 26.1 の条件が成り立つ。ゆえに

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{z}{z^2 + 1} e^{iz}; i \right) \right) = \operatorname{Im} \left(\pi i \cdot \frac{ze^{iz}}{2z} \Big|_{z=i} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\pi i e^{i^2} \right) = \frac{\pi}{2e}. \quad \square$$

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

まず例から始める。

例 26.5

$$I := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4 \cos \theta} \text{ を求めよ。}$$

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

まず例から始める。

例 26.5

$I := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4 \cos \theta}$ を求めよ。

(解答) $z = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) とおくと、 $dz = ie^{i\theta} d\theta$ であるから $d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}$.

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

まず例から始める。

例 26.5

$I := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4 \cos \theta}$ を求めよ。

(解答) $z = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) とおくと、 $dz = ie^{i\theta} d\theta$ であるから $d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}$. また

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + 1/z}{2}.$$

であるから

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

まず例から始める。

例 26.5

$I := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4 \cos \theta}$ を求めよ。

(解答) $z = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) とおくと、 $dz = ie^{i\theta} d\theta$ であるから $d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}$ 。また

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + 1/z}{2}.$$

であるから

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1} \frac{1}{5 - 4 \cdot \frac{z + z^{-1}}{2}} \cdot \frac{1}{iz} dz = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{5z - 2(z^2 + 1)} dz \\ &= i \int_{|z|=1} \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2} = i \int_{|z|=1} \frac{dz}{(2z - 1)(z - 2)} \\ &= i \cdot 2\pi i \sum_{|c| < 1} \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(2z - 1)(z - 2)}; c \right) = -2\pi \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(2z - 1)(z - 2)}; \frac{1}{2} \right) \\ &= -2\pi \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{(2z - 1)(z - 2)} = -2\pi \frac{1}{2(\frac{1}{2} - 2)} = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i}$ があっても OK.

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i}$ があっても OK.

例 26.6

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \sin \theta}$$

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i}$ があっても OK.

例 26.6

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \sin \theta}$$

$z = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) とおくと、 $dz = ie^{i\theta} d\theta$ であるから $d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}$. また

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i}$$

であるから

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i}$ があっても OK.

例 26.6

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \sin \theta}$$

$z = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) とおくと、 $dz = ie^{i\theta} d\theta$ であるから $d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}$. また

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i}$$

であるから

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1} \frac{1}{3 + \frac{1}{2i}(z - 1/z)} \cdot \frac{dz}{iz} = 2 \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 6iz - 1} \\ &= 2 \cdot 2\pi i \sum_{|c| < 1} \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 6iz - 1}; c \right) = 4\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 6iz + 1}; (-3 + 2\sqrt{2})i \right) \\ &= 4\pi i \lim_{z \rightarrow (-3 + 2\sqrt{2})i} \frac{1}{z - (-3 - 2\sqrt{2})i} = 4\pi i \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}i} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad \square \end{aligned}$$

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i}$ があっても OK.

例 26.6

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \sin \theta}$$

$z = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) とおくと、 $dz = ie^{i\theta} d\theta$ であるから $d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}$. また

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i}$$

であるから

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1} \frac{1}{3 + \frac{1}{2i}(z - 1/z)} \cdot \frac{dz}{iz} = 2 \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 6iz - 1} \\ &= 2 \cdot 2\pi i \sum_{|c| < 1} \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 6iz - 1}; c \right) = 4\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 6iz + 1}; (-3 + 2\sqrt{2})i \right) \\ &= 4\pi i \lim_{z \rightarrow (-3 + 2\sqrt{2})i} \frac{1}{z - (-3 - 2\sqrt{2})i} = 4\pi i \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}i} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad \square \end{aligned}$$

結局 $\cos \theta$, $\sin \theta$ の有理式の $[0, 2\pi]$ における積分は、このやり方で計算できることが分かる。

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

一応定理の形にまとめておくが、一般の形で証明しておく必要はないであろう。

定理 26.7 (三角関数の有理関数の周期積分)

$r(x, y)$ を x, y の有理式とするとき、

$$(4a) \quad \int_0^{2\pi} r(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = 2\pi i \sum_{|c|<1} \operatorname{Res}(f; c).$$

ただし f は

$$(4b) \quad f(z) := \frac{1}{iz} r\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)$$

で定義し、 $f(z)$ は単位円周 $|z|=1$ 上に極を持たないとする。また $\sum_{|c|<1}$ は、 f の極 c のうち、単位円盤内 $|z|<1$ に属するものすべてについての和を意味する。

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

一応定理の形にまとめておくが、一般の形で証明しておく必要はないであろう。

定理 26.7 (三角関数の有理関数の周期積分)

$r(x, y)$ を x, y の有理式とするとき、

$$(4a) \quad \int_0^{2\pi} r(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = 2\pi i \sum_{|c|<1} \operatorname{Res}(f; c).$$

ただし f は

$$(4b) \quad f(z) := \frac{1}{iz} r\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)$$

で定義し、 $f(z)$ は単位円周 $|z|=1$ 上に極を持たないとする。また $\sum_{|c|<1}$ は、 f の極 c のうち、単位円盤内 $|z|<1$ に属するものすべてについての和を意味する。

注意: $\cos \theta = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $\sin \theta = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ であるが、そう変形してしまうと、 z の正則関数ではないので、留数定理が使えなくなる。 **\bar{z} でなくて、 z^{-1} を使うのがポイント。**

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

例 26.8

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta + \sin \theta}$$

$z = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) とおくと、これは $|z| = 1$ のパラメータ表示であり、

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}.$$

また $dz = ie^{i\theta} d\theta$ より、 $d\theta = \frac{dz}{iz}$. ゆえに $(\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$ に注意して)

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=1} \frac{1}{2 + \frac{z+z^{-1}}{2} + \frac{z-z^{-1}}{2i}} \cdot \frac{1}{iz} dz = \int_{|z|=1} \frac{dz}{2iz + i(z^2 + 1)/2 + (z^2 - 1)/2} \\ &= 2 \int_{|z|=1} \frac{dz}{(i+1)z^2 + 4iz + (i-1)} = (1-i) \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2(1+i)z + i}. \end{aligned}$$

ここからどうするか。閉曲線に沿う線積分だから、留数定理の利用を考える。特異点を探せ。それは分母の零点だ。それを求めよう。それから閉曲線の中に入っているものを探す。そして留数を計算する。図を描いて考える。

13.3 三角関数の有理関数の周期積分

例 26.8 (つづき)

$z^2 + 2(1+i)z + i = 0$ の根は

$$\begin{aligned} z &= -(1+i) \pm \sqrt{(1+i)^2 - i} = -(1+i) \pm \sqrt{i} = -(1+i) \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \\ &= -1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + i \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right), -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + i \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

前者を α , 後者を β とすると、このうち $|z| < 1$ にあるのは β .

$$\operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 2(1+i)z + i}; \beta \right) = \lim_{z \rightarrow \beta} \left((z - \beta) \frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)} \right) = \frac{1}{\beta - \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+i)}.$$

ゆえに

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta + \sin \theta} = (1-i) \cdot 2\pi i \frac{1}{\sqrt{2}(1+i)} = \sqrt{2}\pi. \quad \square$$

(動画作成の後に追記) 定積分計算の話題に詳しいテキストとして、一松 [2] をあげておく。色々面白い例が載っている。

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2020/complex2020.pdf> (2014～).
- [2] ひとつまっしん 一松 信：留数解析 — 留数による定積分と級数の計算，共立出版 (1979)，第 5 章は数値積分の高橋-森理論の解説。