

複素関数・同演習 第24回

～留数の計算～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2020年12月16日

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 留数定理
 - 留数の計算
 - 留数が簡単に求まる場合
 - 極の場合の留数の計算
- 3 参考文献

- いよいよ留数定理の節に入る。今回は留数の求め方について学ぶ(そうすれば早めに計算練習ができるはず、ということだが、話の進め方としては不自然かもしれない)。Laurent 展開が得られれば留数が分かるのは当然であるが、Laurent 展開せずに留数が求められる場合があり、応用上重要である。講義ノート [1] の §12.2 の内容である。
- 宿題 12 を出します (締め切りは 2021 年 1 月 12 日 13:30)。

11 留数定理 11.1 留数の計算

11.1.1 簡単に求まる場合

いよいよ留数定理の前までやって来た。

留数定理を述べる (§11.2) のに先立ち、留数 $\text{Res}(f; c)$ の計算の仕方を詳しく説明する。

まず留数の定義を復習する。複素関数 f が $A(c; 0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - c| < R\}$ で正則のとき (主に c が f の孤立特異点の場合)、 f の c における留数 $\text{Res}(f; c)$ とは

$$(1) \quad \text{Res}(f; c) := a_{-1}.$$

ただし f の c のまわりの Laurent 展開の係数を $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ とする。

当たり前のことだけれど、強調しておく。

f の c のまわりの Laurent 展開が求まれば、 $\text{Res}(f; c)$ が何かはすぐ分かる。

$0 < r < R$ を満たす任意の r に対して

$$(2) \quad \text{Res}(f; c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} f(z) dz$$

が成り立つことも思い出しておく ($\because a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}} dz$)。

(2) を使って留数を求めると言うよりも、逆に留数を使って積分を計算する方向に用いる。

11.1.1 簡単に求まる場合

最初に確認しておく。

Ⓐ f が $D(c; R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < R\}$ で正則のとき $\text{Res}(f; c) = 0$

Ⓑ c が f の除去可能特異点であれば $\text{Res}(f; c) = 0$.

(\because (a) Taylor 展開が Laurent 展開になる。(a), (b) とも主部は 0 だから $a_{-1} = 0$ 。)

実質的に c が f の極または真性特異点であるときが問題になる。

$\text{Res}(f; c)$ は f について線形である。すなわち一般に次式が成り立つ。

$$\text{Res}(f + g; c) = \text{Res}(f; c) + \text{Res}(g; c),$$

$$\text{Res}(\lambda f; c) = \lambda \text{Res}(f; c).$$

例 24.1

$\text{Res}(f; c) = a_{-1}$ のとき、 $\text{Res}(2f(z) + e^z; c)$ を求めよ。

(解答)

$$\text{Res}(2f(z) + e^z; c) = 2 \text{Res}(f; c) + \text{Res}(e^z; c) = 2a_{-1} + 0 = 2a_{-1}. \quad \square$$

例 24.2

$$(*) \quad f(z) = \frac{3}{(z-1)^2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}).$$

1 は f の孤立特異点である。(*) 自身が f の 1 のまわりの Laurent 展開である。Laurent 展開の主部は $\frac{3}{(z-1)^2}$ 。1 は f の 2 位の極であり、留数 $\text{Res}(f; 1) = 0$ 。

例 24.3

$$(3) \quad f(z) = \exp \frac{1}{z} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

0 は f の孤立特異点である。0 の周りの Laurent 展開は

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} \quad (z \in A(0; 0, +\infty)).$$

Laurent 展開の主部は $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$ 。無限項あるので、0 は f の真性特異点であり、留数

$$\text{Res}(f; 0) = 1.$$

例 24.4

$$(4) \quad f(z) = \frac{\sin z}{z} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

0 は f の孤立特異点である。0 のまわりの Laurent 展開は

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots \quad (z \in A(0; 0, +\infty)).$$

Laurent 展開の主部は 0。ゆえに 0 は f の除去可能特異点であり、留数は $\text{Res}(f; 0) = 0$ 。

例 24.5

$$(5) \quad f(z) = \frac{\sin z}{z^2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

0 は f の孤立特異点である。0 のまわりの Laurent 展開は

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k-1} + \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \cdots \quad (z \in A(0; 0, +\infty)).$$

この Laurent 展開の主部は $\frac{1}{z}$ 。ゆえに 0 は f の 1 位の極であり、留数は $\text{Res}(f; 0) = 1$ 。

11.1.1 簡単に求まる場合

例 24.6 (有理関数の留数)

$f(z)$ を z の有理式とする。 $f(z) = \frac{q(z)}{p(z)}$ ($p(z)$, $q(z)$ は共通因数のない多項式) と表すことが出来る。 $p(z)$ の相異なる根を $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ で、 α_j の重複度を m_j とすると、部分分数分解により

$$f(z) = z \text{ の多項式} + \sum_{j=1}^r \sum_{m=1}^{m_j} \frac{A_{j,m}}{(z - \alpha_j)^m}, \quad A_{j,m_j} \neq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, r)$$

と変形できる。関数 f は $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ で正則であり、 α_j は f の m_j 位の極である。

f の α_j のまわりの Laurent 展開の主部は

$$\sum_{m=1}^{m_j} \frac{A_{j,m}}{(z - \alpha_j)^m}$$

であり、留数は $\text{Res}(f; \alpha_j) = A_{j,1}$ 。このように有理関数の場合は、部分分数分解をするだけで、Laurent 展開の主部と留数が分かる。

実は部分分数分解もサボることが出来たりすることを、この後説明する。 □

11.1.2 極の場合の留数の計算

この項では、 c が f の極である場合に、Laurent 展開を求めずに、 $\text{Res}(f; c)$ を知る方法をいくつか説明する。

(繰り返し: c が f の除去可能特異点ならば $\text{Res}(f; c) = 0$.)

c が f の極の場合、色々便利な方法がある。

「 k 位の極」という言葉を定義済みであるが、「高々 k 位の極」という言葉も定義しておくとも便利である。

c が f の **高々 k 位の極** $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\exists k' \in \mathbb{N}: k' \leq k)$ c は f の k' 位の極または c は f の除去可能特異点または正則点

これは次の条件と同値である。

$$(\exists R > 0)(\exists \{a_n\}_{n=-k}^{\infty}) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n + \sum_{n=1}^k \frac{a_{-n}}{(z - c)^n} \quad (z \in A(c; 0, R)).$$

式の形は k 位の極の場合に似ているが、 $a_{-k} \neq 0$ という条件はつけていないところに注意する。

11.1.2 極の場合の留数の計算

この項の定理の多くに「 c が高々 k 位の極ならば」という仮定が現れる。その仮定が満たされることをチェックするために、次の補題は使いやすい。

補題 24.7 (c が分母の k 位の零点ならば高々 k 位の極)

U は c を含む \mathbb{C} の開集合で、 $p, q: U \rightarrow \mathbb{C}$ は正則、 $f = \frac{q}{p}$ とする。 $k \in \mathbb{N}$ 、 c が p の k 位の零点とすると、次の(1), (2)が成り立つ。

- ① c が q の零点でないならば、 c は f の k 位の極である。
- ② c が q の零点ならば、 c は f の高々 k 位の極である。

証明.

仮定より、 U で正則な関数 p_1 が存在して、 $p(z) = (z - c)^k p_1(z)$ 、 $p_1(c) \neq 0$ 。

- ① $g(z) := \frac{q(z)}{p_1(z)}$ とおくと、 g は c のある近傍で正則で、 $f(z) = \frac{q(z)}{(z-c)^k p_1(z)} = \frac{g(z)}{(z-c)^k}$ 。
仮定 $q(c) \neq 0$ より $g(c) \neq 0$ であるから、 c は f の k 位の極である。
- ② (駆け足証明) q が定数関数 0 であれば証明の必要はない。そうでない場合は、ある自然数 l が存在して、 c は q の l 位の零点である。 $l \geq k$ ならば c は f の除去可能特異点、 $l < k$ ならば c は f の $k - l$ 位の極である。

□

11.1.2 極の場合の留数の計算

定理 24.8 (極の場合の留数の計算)

$k \in \mathbb{N}$, c が f の高々 k 位の極であれば

$$(6) \quad \text{Res}(f; c) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow c} \left(\frac{d}{dz} \right)^{k-1} \left[(z-c)^k f(z) \right].$$

特に $k=1$ のとき

$$(7) \quad \text{Res}(f; c) = \lim_{z \rightarrow c} (z-c)f(z).$$

証明は次のスライドに書くが、要するに

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \text{ (収束冪級数) のとき } a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

を導くのと同一である。

(少し脱線) 実は $\text{Res}(f; c) = a_{-1}$ だけでなく、 a_n ($n \geq -k$) を求められる:

$$a_n = \frac{1}{(n+k)!} \lim_{z \rightarrow c} \left(\frac{d}{dz} \right)^{n+k} \left[(z-c)^k f(z) \right].$$

11.1.2 極の場合の留数の計算

証明.

c が f の高々 k 位の極であることから、ある $R > 0$ と複素数列 $\{a_n\}_{n=-k}^{\infty}$ が存在して

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-c)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-c} + a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots \quad (0 < |z-c| < R).$$

分母を払って

$$(z-c)^k f(z) = a_{-k} + a_{-(k-1)}(z-c) + \cdots + a_{-1}(z-c)^{k-1} + a_0(z-c)^k + a_1(z-c)^{k+1} + \cdots$$

$k-1$ 回微分すると、 a_{-1} を含む定数項が先頭に現れる。

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1} \left[(z-c)^k f(z) \right] = (k-1)! a_{-1} + \frac{k!}{1!} a_0 (z-c) + \frac{(k+1)!}{2!} a_1 (z-c)^2 + \cdots$$

$z \rightarrow c$ としてから、両辺を $(k-1)!$ で割れば a_{-1} が得られる。 □

11.1.2 極の場合の留数の計算

例 24.9

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}.$$

$$f(z) = \frac{1/2}{z} + \frac{-1}{z-1} + \frac{1/2}{z-2}$$

と部分分数分解できるから

$$\operatorname{Res}(f; 0) = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Res}(f; 1) = -1, \quad \operatorname{Res}(f; 2) = \frac{1}{2}.$$

一方、定理 24.8 の公式 (7) を使うには…0, 1, 2 は f の 1 位の極である (0, 1, 2 は分母の 1 位の零点で、分子の零点ではないので、補題 24.7 (1) が適用できる)。ゆえに

$$\operatorname{Res}(f; 0) = \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \neq 0}} (z-0)f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{Res}(f; 1) = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \neq 1}} (z-1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z(z-2)} = \frac{1}{1(-1)} = -1,$$

$$\operatorname{Res}(f; 2) = \lim_{\substack{z \rightarrow 2 \\ z \neq 2}} (z-2)f(z) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}.$$

11.1.2 極の場合の留数の計算

例 24.10

$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ のとき、 $\text{Res}(f; i)$ は？

(解答) $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$ であるから、 i は分母の 1 位の零点であり、分子の零点ではないので、 i は f の 1 位の極である。定理 24.8 の公式 (7) より

$$\text{Res}(f; i) = \lim_{\substack{z \rightarrow i \\ z \neq i}} (z - i)f(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow i \\ z \neq i}} \frac{1}{z + i} = \frac{1}{z + i} \Big|_{z=i} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}.$$

11.1.2 極の場合の留数の計算

例 24.11

$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-3)^2}$ のとき、3 は f の 2 位の極である (\because 3 は分母の 2 位の零点で、分子の零点ではないから)。定理 24.8 の公式 (6) を使うと

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f; 3) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{\substack{z \rightarrow 3 \\ z \neq 3}} \left(\frac{d}{dz} \right)^{2-1} [(z-3)^2 f(z)] = \lim_{\substack{z \rightarrow 3 \\ z \neq 3}} \left(\frac{z}{z+1} \right)' \\ &= \lim_{\substack{z \rightarrow 3 \\ z \neq 3}} \frac{(z+1) \cdot 1 - z \cdot 1}{(z+1)^2} = \frac{1}{(z+1)^2} \Big|_{z=3} = \frac{1}{16}.\end{aligned}$$

一方、部分分数分解すると

$$f(z) = \frac{1/16}{z+1} + \frac{1/16}{z-3} + \frac{3/4}{(z-3)^2}$$

であるから、 $\operatorname{Res}(f; 3) = \frac{1}{16}$.

11.1.2 極の場合の留数の計算

例 24.12

$f(z) = \frac{1}{\sin z}$ とするとき、(f は $A(0; 0, \pi)$ で正則であるから) 0 は f の孤立特異点である。 $\text{Res}(f; 0)$ は?

Laurent 展開の計算はちょっと面倒である (後で時間があれば紹介する)。

0 は f の 1 位の極である ($\because 0$ は、 f の分母 \sin の 1 位の零点であり、分子の零点ではない)。ゆえに

$$\text{Res}(f; 0) = \lim_{z \rightarrow 0} (z - 0)f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} = 1.$$

11.1.2 極の場合の留数の計算

この流れで、よく使う便利な公式を導いておこう。

定理 24.13 (分母の 1 位の零点における留数)

P と Q は c のある開近傍で正則で、 c は P の 1 位の零点とすると、 c は $\frac{Q}{P}$ の高々 1 位の極であり

$$\operatorname{Res} \left(\frac{Q}{P}; c \right) = \frac{Q(c)}{P'(c)}.$$

証明.

補題 24.7 (2) より、 c は f の高々 1 位の極である。 $P(c) = 0$ に注意して、定理 24.8 の公式 (7) を使うと

$$\operatorname{Res} \left(\frac{Q}{P}; c \right) = \lim_{z \rightarrow c} (z - c) \frac{Q(z)}{P(z)} = \lim_{z \rightarrow c} \frac{z - c}{P(z) - P(c)} Q(z) = \frac{Q(c)}{P'(c)}.$$

□

11.1.2 極の場合の留数の計算

特に $P(z)$ が多項式でない場合に便利¹なので、次の例を強調すると良い。

例 24.14 (解き直し)

$f(z) = \frac{1}{\sin z}$ に対して $\text{Res}(f; 0)$ は?

(解答) 0 は分母 $\sin z$ の 1 位の零点であるから、定理 24.13 が適用できて

$$\text{Res}(f; 0) = \frac{1}{(\sin z)'} \Big|_{z=0} = \frac{1}{\cos 0} = 1.$$

¹共通因数を簡単には消すことが出来ない。

11.1.2 極の場合の留数の計算

もちろん多項式の例も見せる。

例 24.15 (頻出する)

$f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$, $c = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ とするとき、 $\text{Res}(f; c)$ を求めよ。

(解答) $P(z) = z^4 + 1$, $Q(z) = 1$ とすると、 $f = \frac{Q}{P}$. $P(c) = 0$, $P'(z) = 4z^3$, $P'(c) = 4c^3 \neq 0$ であるから、 c は P の 1 位の零点である。定理 24.13 を適用すると、

$$\text{Res}(f; c) = \left. \frac{Q(z)}{P'(z)} \right|_{z=c} = \left. \frac{1}{4z^3} \right|_{z=c} = \left. \frac{z}{4z^4} \right|_{z=c} = \frac{c}{4 \cdot (-1)} = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}}. \quad \square$$

(注) $\frac{1}{4c^3} = \frac{c}{4c^4} = \frac{c}{4(-1)} = -\frac{c}{4}$ で計算するのはちょっとした工夫であるが、 $c = e^{i\pi/4}$ であるから、 $\frac{1}{4c^3} = \frac{1}{4e^{i3\pi/4}} = 4e^{-3\pi/4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ とすることも出来る。 □

11.1.2 極の場合の留数の計算

定理 24.16

c が f の 1 位の極、 φ が c のある開近傍で正則ならば、 c は $f\varphi$ の高々 1 位の極であり

$$(8) \quad \operatorname{Res}(f\varphi; c) = \operatorname{Res}(f; c)\varphi(c).$$

(注意: c の位数が 2 以上のときには、この命題は成り立たない。)

証明.

(前半) c が f の高々 1 位の極であることから、 c のある近傍で正則な関数 g が存在して、

$$f(z) = \frac{g(z)}{z-c} \text{ が成り立つ。}$$

$$f(z)\varphi(z) = \frac{g(z)\varphi(z)}{z-c}$$

が成り立ち、分母・分子は $z=c$ の近傍で正則であり、 c は分母の 1 位の零点であるから、 c は $f\varphi$ の高々 1 位の極である。

(後半)

$$\operatorname{Res}(f\varphi; c) = \lim_{z \rightarrow c} (z-c)f(z)\varphi(z) = \lim_{z \rightarrow c} (z-c)f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow c} \varphi(z) = \operatorname{Res}(f; c)\varphi(c).$$

11.1.2 極の場合の留数の計算

例 24.17 (とある問題から)

$f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$, $\varphi(z) = \text{Log} \frac{z+1}{z-1}$ とする。

φ は $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ で定義されて正則である ($\because z \notin [-1, 1]$ のとき $\frac{z+1}{z-1} \notin (-\infty, 0]$ であることが証明できるから。ここでは認めて議論する。)

c を f の極とするとき、 $\text{Res}(f\varphi; c)$ を求めよ。

(何でこんなものを求めるのか — 実は $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4 + 1} = \sum_{c^4+1=0} \text{Res}(f\varphi; c)$ という式が成り立つ。ある種の定積分を留数で計算できるので、これが必要になる。)

$c \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ であるので、 φ は c のある近傍で正則である。ゆえに上の定理 24.16 から

$$\text{Res}(f\varphi; c) = \varphi(c) \text{Res}(f; c) = \varphi(c) \frac{1}{(z^4 + 1)' \Big|_{z=c}} = \varphi(c) \frac{c}{4c^4} = -\frac{c}{4} \text{Log} \frac{c+1}{c-1}.$$

$c = \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$ であるが、具体的な計算は面倒なので省略する。 □

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2020/complex2020.pdf> (2014～).