複素関数・同演習 第24回

～留数の計算～

桂田(かつらだ) 祐史(まさし)

2020年12月16日

目次

本日の内容・連絡事項

- いよいよ留数定理の節に入る。今回は留数の求め方について学ぶ (そうすれば早めに計算練習ができるはず、ということだが、話の進め方としては不自然かもしれない)。Laurent 展開が得られれば留数が分かるのは当然であるが、Laurent 展開せずに留数が求められる場合があり、応用上重要である。講義ノート [1] の §12.2 の内容である。
- 宿題 12 を出します (締め切りは 2021 年 1 月 12 日 13:30)。

11.1.1 簡単に求まる場合

いよいよ留数定理の前までやって来た。

留数定理を述べる (§11.2) のに先立ち、留数 $\mathrm{Res}(f;c)$ の計算の仕方を詳しく説明する。

いよいよ留数定理の前までやって来た。

留数定理を述べる (§11.2) のに先立ち、留数 $\mathrm{Res}(f;c)$ の計算の仕方を詳しく説明する。

まず留数の定義を復習する。複素関数 f が $A(c;0,R)=\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z-c|<R\}$ で正則のとき (主に c が f の孤立特異点の場合)、f の c における留数 $\mathrm{Res}(f;c)$ とは

(1)
$$\mathrm{Res}(f;c):=a_{-1}.$$

ただし f の c のまわりの Laurent 展開の係数を $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ とする。

いよいよ留数定理の前までやって来た。

留数定理を述べる (§11.2) のに先立ち、留数 $\operatorname{Res}(f;c)$ の計算の仕方を詳しく説明する。

まず留数の定義を復習する。複素関数 f が $A(c;0,R)=\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z-c|<R\}$ で正則のとき (主に c が f の孤立特異点の場合)、f の c における留数 $\operatorname{Res}(f;c)$ とは

$$\operatorname{Res}(f;c):=a_{-1}. \tag{1}$$

ただし f の c のまわりの Laurent 展開の係数を $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ とする。

当たり前のことだけれど、強調しておく。

f の c のまわりの Laurent 展開が求まれば、$\operatorname{Res}(f;c)$ が何かはすぐ分かる。

いよいよ留数定理の前までやって来た。

留数定理を述べる (§11.2) のに先立ち、留数 $\mathrm{Res}(f;c)$ の計算の仕方を詳しく説明する。

まず留数の定義を復習する。複素関数 f が $A(c;0,R)=\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z-c|<R\}$ で正則のとき (主に c が f の孤立特異点の場合)、f の c における留数 $\mathrm{Res}(f;c)$ とは

(1) $$\mathrm{Res}(f;c):=a_{-1}.$$

ただし f の c のまわりの Laurent 展開の係数を $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ とする。

当たり前のことだけれど、強調しておく。

f の c のまわりの Laurent 展開が求まれば、$\mathrm{Res}(f;c)$ が何かはすぐ分かる。

$0<r<R$ を満たす任意の r に対して

(2) $$\mathrm{Res}(f;c)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}f(z)\,dz$$

が成り立つことも思い出しておく ($\because$ $a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}\,dz$)。

(2) を使って留数を求めると言うよりも、逆に留数を使って積分を計算する方向に用いる。

11.1.1 簡単に求まる場合

最初に確認しておく。

(a) f が $D(c;R)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-c|<R\}$ で正則のとき $\mathrm{Res}(f;c)=0$

(b) c が f の除去可能特異点であれば $\mathrm{Res}(f;c)=0$.

($\because$ (a) Taylor 展開が Laurent 展開になる。(a), (b) とも主部は 0 だから $a_{-1}=0$。)

実質的に c が f の極または真性特異点であるときが問題になる。

11.1.1 簡単に求まる場合

最初に確認しておく。

(a) f が $D(c;R)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z-c|<R\}$ で正則のとき $\mathrm{Res}(f;c)=0$

(b) c が f の除去可能特異点であれば $\mathrm{Res}(f;c)=0$.

($\because$ (a) Taylor 展開が Laurent 展開になる。(a), (b) とも主部は 0 だから $a_{-1}=0$。)

実質的に c が f の極または真性特異点であるときが問題になる。

$\mathrm{Res}(f;c)$ は f について線形である。すなわち一般に次式が成り立つ。

$$\mathrm{Res}(f+g;c)=\mathrm{Res}(f;c)+\mathrm{Res}(g;c),$$
$$\mathrm{Res}(\lambda f;c)=\lambda\,\mathrm{Res}(f;c).$$

例 24.1

$\mathrm{Res}(f;c)=a_{-1}$ のとき、$\mathrm{Res}\left(2f(z)+e^z;c\right)$ を求めよ。

(解答)

$$\mathrm{Res}(2f(z)+e^z;c)=2\,\mathrm{Res}(f;c)+\mathrm{Res}(e^z;c)=2a_{-1}+0=2a_{-1}. \quad \square$$

例 24.2

$$(*)\qquad f(z)=\frac{3}{(z-1)^2}\quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}).$$

1 は f の孤立特異点である。$(*)$ 自身が f の 1 のまわりの Laurent 展開である。Laurent 展開の主部は $\dfrac{3}{(z-1)^2}$. 1 は f の 2 位の極であり、留数 $\mathrm{Res}(f;1)=0$.

例 24.3

$$(3)\qquad f(z)=\exp\frac{1}{z}\quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}).$$

0 は f の孤立特異点である。0 の周りの Laurent 展開は

$$f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}\quad (z\in A(0;0,+\infty)).$$

Laurent 展開の主部は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}$. 無限項あるので、0 は f の真性特異点であり、留数 $\mathrm{Res}(f;0)=1$.

例 24.4

(4)
$$f(z)=\frac{\sin z}{z}\quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}).$$

0 は f の孤立特異点である。0 のまわりの Laurent 展開は

$$f(z)=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots\quad (z\in A(0;0,+\infty)).$$

Laurent 展開の主部は 0. ゆえに 0 は f の除去可能特異点であり、留数は $\mathrm{Res}(f;0)=0$.

例 24.5

(5)
$$f(z)=\frac{\sin z}{z^2}\quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}).$$

0 は f の孤立特異点である。0 のまわりの Laurent 展開は

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k-1}+\frac{1}{z}=\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\cdots (z\in A(0;0,+\infty)).$$

この Laurent 展開の主部は $\frac{1}{z}$. ゆえに 0 は f の 1 位の極であり、留数は $\mathrm{Res}(f;0)=1$.

例 24.6 (有理関数の留数)

$f(z)$ を z の有理式とする。$f(z)=\dfrac{q(z)}{p(z)}$ ($p(z)$, $q(z)$ は共通因数のない多項式) と表すことが出来る。$p(z)$ の相異なる根を $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ で、α_j の重複度を m_j とすると、部分分数分解により

$$f(z)=z\text{ の多項式}+\sum_{j=1}^{r}\sum_{m=1}^{m_j}\frac{A_{j,m}}{(z-\alpha_j)^m},\quad A_{j,m_j}\neq 0\quad (j=1,2,\cdots,r)$$

と変形できる。

例 24.6 (有理関数の留数)

$f(z)$ を z の有理式とする。$f(z)=\dfrac{q(z)}{p(z)}$ ($p(z)$, $q(z)$ は共通因数のない多項式) と表すことが出来る。$p(z)$ の相異なる根を $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ で、α_j の重複度を m_j とすると、部分分数分解により

$$f(z)=z \text{ の多項式}+\sum_{j=1}^{r}\sum_{m=1}^{m_j}\frac{A_{j,m}}{(z-\alpha_j)^m},\quad A_{j,m_j}\neq 0\quad (j=1,2,\cdots,r)$$

と変形できる。関数 f は $\mathbb{C}\setminus\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$ で正則であり、α_j は f の m_j 位の極である。

11.1.1 簡単に求まる場合

例 24.6 (有理関数の留数)

$f(z)$ を z の有理式とする。$f(z)=\dfrac{q(z)}{p(z)}$ ($p(z)$, $q(z)$ は共通因数のない多項式) と表すことが出来る。$p(z)$ の相異なる根を $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ で、α_j の重複度を m_j とすると、部分分数分解により

$$f(z)=z\text{ の多項式}+\sum_{j=1}^{r}\sum_{m=1}^{m_j}\frac{A_{j,m}}{(z-\alpha_j)^m},\quad A_{j,m_j}\neq 0\quad (j=1,2,\cdots,r)$$

と変形できる。関数 f は $\mathbb{C}\setminus\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$ で正則であり、α_j は f の m_j 位の極である。

f の α_j のまわりの Laurent 展開の主部は

$$\sum_{m=1}^{m_j}\frac{A_{j,m}}{(z-\alpha_j)^m}$$

であり、留数は $\mathrm{Res}(f;\alpha_j)=A_{j,1}$. このように有理関数の場合は、部分分数分解をするだけで、Laurent 展開の主部と留数が分かる。

実は部分分数分解もサボることが出来たりすることを、この後説明する。 □

11.1.2 極の場合の留数の計算

この項では、c が f の極である場合に、Laurent 展開を求めずに、$\mathrm{Res}(f;c)$ を知る方法をいくつか説明する。

(繰り返し: c が f の除去可能特異点ならば $\mathrm{Res}(f;c)=0$.)
c が f の極の場合、色々と便利な方法がある。

11.1.2 極の場合の留数の計算

この項では、c が f の極である場合に、Laurent 展開を求めずに、$\mathrm{Res}(f;c)$ を知る方法をいくつか説明する。

(繰り返し: c が f の除去可能特異点ならば $\mathrm{Res}(f;c)=0$.)
c が f の極の場合、色々と便利な方法がある。

「k 位の極」という言葉を定義済みであるが、「高々 k 位の極」と言う言葉も定義しておくと便利である。

c が f の**高々 k 位の極** $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\exists k'\in\mathbb{N}\colon k'\le k)$ c は f の k' 位の極または
c は f の除去可能特異点または正則点

11.1.2 極の場合の留数の計算

この項では、c が f の極である場合に、Laurent 展開を求めずに、$\mathrm{Res}(f;c)$ を知る方法をいくつか説明する。

(繰り返し: c が f の除去可能特異点ならば $\mathrm{Res}(f;c)=0$.)
c が f の極の場合、色々と便利な方法がある。

「k 位の極」という言葉を定義済みであるが、「高々 k 位の極」と言う言葉も定義しておくと便利である。

c が f の**高々 k 位の極** $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $(\exists k'\in\mathbb{N}\colon k'\le k)$ c は f の k' 位の極または c は f の除去可能特異点または正則点

これは次の条件と同値である。

$$(\exists R>0)(\exists\{a_n\}_{n=-k}^{\infty})\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{k}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\quad (z\in A(c;0,R)).$$

式の形は k 位の極の場合に似ているが、$a_{-k}\neq 0$ **という条件はつけていない**ところに注意する。

11.1.2 極の場合の留数の計算

この項の定理の多くに「c が高々 k 位の極ならば」という仮定が現れる。その仮定が満たされることをチェックするために、次の補題は使いやすい。

補題 24.7 (c が分母の k 位の零点ならば高々 k 位の極)

U は c を含む $\mathbb{C}$ の開集合で、$p, q\colon U \to \mathbb{C}$ は正則, $f = \dfrac{q}{p}$ とする。$k \in \mathbb{N}$, c が p の k 位の零点とすると、次の (1), (2) が成り立つ。

1. c が q の零点でないならば、c は f の k 位の極である。
2. c が q の零点ならば、c は f の高々 k 位の極である。

11.1.2 極の場合の留数の計算

この項の定理の多くに「c が高々 k 位の極ならば」という仮定が現れる。その仮定が満たされることをチェックするために、次の補題は使いやすい。

補題 24.7 (c が分母の k 位の零点ならば高々 k 位の極)

U は c を含む $\mathbb{C}$ の開集合で、$p, q\colon U \to \mathbb{C}$ は正則, $f = \dfrac{q}{p}$ とする。$k \in \mathbb{N}$, c が p の k 位の零点とすると、次の (1), (2) が成り立つ。

1. c が q の零点でないならば、c は f の k 位の極である。
2. c が q の零点ならば、c は f の高々 k 位の極である。

証明.

仮定より、U で正則な関数 p_1 が存在して、$p(z) = (z-c)^k p_1(z)$, $p_1(c) \neq 0$.

1. $g(z) := \frac{q(z)}{p_1(z)}$ とおくと、g は c のある近傍で正則で、$f(z) = \frac{q(z)}{(z-c)^k p_1(z)} = \frac{g(z)}{(z-c)^k}$.
仮定 $q(c) \neq 0$ より $g(c) \neq 0$ であるから、c は f の k 位の極である。

11.1.2 極の場合の留数の計算

この項の定理の多くに「c が高々 k 位の極ならば」という仮定が現れる。その仮定が満たされることをチェックするために、次の補題は使いやすい。

補題 24.7 (c が分母の k 位の零点ならば高々 k 位の極)

U は c を含む $\mathbb{C}$ の開集合で、$p, q\colon U \to \mathbb{C}$ は正則, $f = \dfrac{q}{p}$ とする。$k \in \mathbb{N}$, c が p の k 位の零点とすると、次の (1), (2) が成り立つ。

1. c が q の零点でないならば、c は f の k 位の極である。
2. c が q の零点ならば、c は f の高々 k 位の極である。

証明.

仮定より、U で正則な関数 p_1 が存在して、$p(z) = (z-c)^k p_1(z)$, $p_1(c) \neq 0$.

1. $g(z) := \frac{q(z)}{p_1(z)}$ とおくと、g は c のある近傍で正則で、$f(z) = \frac{q(z)}{(z-c)^k p_1(z)} = \frac{g(z)}{(z-c)^k}$. 仮定 $q(c) \neq 0$ より $g(c) \neq 0$ であるから、c は f の k 位の極である。
2. (駆け足証明) q が定数関数 0 であれば証明の必要はない。そうでない場合は、ある自然数 ℓ が存在して、c は q の ℓ 位の零点である。$\ell \geq k$ ならば c は f の除去可能特異点、$\ell < k$ ならば c は f の $k-\ell$ 位の極である。

□

11.1.2 極の場合の留数の計算

定理 24.8 (極の場合の留数の計算)

$k \in \mathbb{N}$, c が f の高々 k 位の極であれば

(6) $$\mathrm{Res}(f; c) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to c} \left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1} \left[(z-c)^k f(z)\right].$$

特に $k = 1$ のとき

(7) $$\mathrm{Res}(f; c) = \lim_{z \to c} (z-c) f(z).$$

11.1.2 極の場合の留数の計算

定理 24.8 (極の場合の留数の計算)

$k \in \mathbb{N}$, c が f の高々 k 位の極であれば

(6)
$$\operatorname{Res}(f; c) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to c} \left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1} \left[(z-c)^k f(z)\right].$$

特に $k = 1$ のとき

(7)
$$\operatorname{Res}(f; c) = \lim_{z \to c} (z-c) f(z).$$

証明は次のスライドに書くが、要するに

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \text{ (収束冪級数) のとき } a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

を導くのと同じである。

11.1.2 極の場合の留数の計算

定理 24.8 (極の場合の留数の計算)

$k\in\mathbb{N}$, c が f の高々 k 位の極であれば

(6)
$$\mathrm{Res}(f;c)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to c}\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1}\left[(z-c)^k f(z)\right].$$

特に $k=1$ のとき

(7)
$$\mathrm{Res}(f;c)=\lim_{z\to c}(z-c)f(z).$$

証明は次のスライドに書くが、要するに

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n \text{ (収束冪級数) のとき } a_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

を導くのと同じである。

(少し脱線) 実は $\mathrm{Res}(f;c)=a_{-1}$ だけでなく、a_n $(n\ge -k)$ を求められる:

$$a_n=\frac{1}{(n+k)!}\lim_{z\to c}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n+k}\left[(z-c)^k f(z)\right].$$

11.1.2 極の場合の留数の計算

証明.

c が f の高々 k 位の極であることから、ある $R > 0$ と複素数列 $\{a_n\}_{n=-k}^{\infty}$ が存在して

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-c)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-c} + a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots (0 < |z-c| < R).$$

11.1.2 極の場合の留数の計算

証明.

c が f の高々 k 位の極であることから、ある $R > 0$ と複素数列 $\{a_n\}_{n=-k}^{\infty}$ が存在して

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-c)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-c} + a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots (0 < |z-c| < R).$$

分母を払って

$$(z-c)^k f(z) = a_{-k} + a_{-(k-1)}(z-c) + \cdots + a_{-1}(z-c)^{k-1} + a_0(z-c)^k + a_1(z-c)^{k+1} + \cdots$$

11.1.2 極の場合の留数の計算

証明.

c が f の高々 k 位の極であることから、ある $R > 0$ と複素数列 $\{a_n\}_{n=-k}^{\infty}$ が存在して

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-c)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-c} + a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots (0 < |z-c| < R).$$

分母を払って

$$(z-c)^k f(z) = a_{-k} + a_{-(k-1)}(z-c) + \cdots + a_{-1}(z-c)^{k-1} + a_0(z-c)^k + a_1(z-c)^{k+1} + \cdots$$

$k-1$ 回微分すると、a_{-1} を含む定数項が先頭に現れる。

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1}\left[(z-c)^k f(z)\right] = (k-1)!a_{-1} + \frac{k!}{1!}a_0(z-c) + \frac{(k+1)!}{2!}a_1(z-c)^2 + \cdots.$$

11.1.2 極の場合の留数の計算

証明.

c が f の高々 k 位の極であることから、ある $R>0$ と複素数列 $\{a_n\}_{n=-k}^{\infty}$ が存在して

$$f(z)=\frac{a_{-k}}{(z-c)^k}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-c}+a_0+a_1(z-c)+a_2(z-c)^2+\cdots(0<|z-c|<R).$$

分母を払って

$$(z-c)^k f(z)=a_{-k}+a_{-(k-1)}(z-c)+\cdots+a_{-1}(z-c)^{k-1}+a_0(z-c)^k+a_1(z-c)^{k+1}+\cdots$$

$k-1$ 回微分すると、a_{-1} を含む定数項が先頭に現れる。

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1}\left[(z-c)^k f(z)\right]=(k-1)!a_{-1}+\frac{k!}{1!}a_0(z-c)+\frac{(k+1)!}{2!}a_1(z-c)^2+\cdots.$$

$z\to c$ としてから、両辺を $(k-1)!$ で割れば a_{-1} が得られる。 □

11.1.2 極の場合の留数の計算

例 24.9

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}.$$

11.1.2 極の場合の留数の計算

例 24.9

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}.$$

$$f(z) = \frac{1/2}{z} + \frac{-1}{z-1} + \frac{1/2}{z-2}$$

と部分分数分解できるから

$$\mathrm{Res}(f;0) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{Res}(f;1) = -1, \quad \mathrm{Res}(f;2) = \frac{1}{2}.$$

11.1.2 極の場合の留数の計算

例 24.9

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}.$$

$$f(z) = \frac{1/2}{z} + \frac{-1}{z-1} + \frac{1/2}{z-2}$$

と部分分数分解できるから

$$\mathrm{Res}(f;0) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{Res}(f;1) = -1, \quad \mathrm{Res}(f;2) = \frac{1}{2}.$$

一方、定理 24.8 の公式 (7) を使うには…0, 1, 2 は f の 1 位の極である (0, 1, 2 は分母の 1 位の零点で、分子の零点ではないので、補題 24.7 (1) が適用できる)。ゆえに

$$\mathrm{Res}(f;0) = \lim_{z\to 0}(z-0)f(z) = \lim_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}} \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2},$$

$$\mathrm{Res}(f;1) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{\substack{z\to 1\\ z\neq 1}} \frac{1}{z(z-2)} = \frac{1}{1(-1)} = -1,$$

$$\mathrm{Res}(f;2) = \lim_{z\to 2}(z-2)f(z) = \lim_{\substack{z\to 2\\ z\neq 2}} \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}.$$

11.1.2 極の場合の留数の計算

例 24.10

$f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ のとき、$\mathrm{Res}(f; i)$ は？

例 24.10

$f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ のとき、$\mathrm{Res}(f; i)$ は？

(解答) $z^2+1 = (z-i)(z+i)$ であるから、i は分母の 1 位の零点であり、分子の零点ではないので、i は f の 1 位の極である。定理 24.8 の公式 (7) より

$$\mathrm{Res}(f; i) = \lim_{z \to i}(z-i)f(z) = \lim_{\substack{z \to i \\ z \neq i}} \frac{1}{z+i} = \left.\frac{1}{z+i}\right|_{z=i} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}.$$

11.1.2 極の場合の留数の計算

例 24.11

$f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z-3)^2}$ のとき、3 は f の 2 位の極である ($\because$ 3 は分母の 2 位の零点で、分子の零点ではないから)。定理 24.8 の公式 (6) を使うと

$$\mathrm{Res}(f;3) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 3}\left(\frac{d}{dz}\right)^{2-1}\left[(z-3)^2 f(z)\right] = \lim_{\substack{z\to 3\\ z\neq 3}}\left(\frac{z}{z+1}\right)'$$

$$= \lim_{\substack{z\to 3\\ z\neq 3}}\frac{(z+1)\cdot 1 - z\cdot 1}{(z+1)^2} = \left.\frac{1}{(z+1)^2}\right|_{z=3} = \frac{1}{16}.$$

例 24.11

$f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z-3)^2}$ のとき、3 は f の 2 位の極である ($\because$ 3 は分母の 2 位の零点で、分子の零点ではないから)。定理 24.8 の公式 (6) を使うと

$$\mathrm{Res}(f;3) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 3}\left(\frac{d}{dz}\right)^{2-1}\left[(z-3)^2 f(z)\right] = \lim_{\substack{z\to 3\\ z\neq 3}}\left(\frac{z}{z+1}\right)'$$
$$= \lim_{\substack{z\to 3\\ z\neq 3}}\frac{(z+1)\cdot 1 - z\cdot 1}{(z+1)^2} = \left.\frac{1}{(z+1)^2}\right|_{z=3} = \frac{1}{16}.$$

一方、部分分数分解すると

$$f(z) = \frac{1/16}{z+1} + \frac{1/16}{z-3} + \frac{3/4}{(z-3)^2}$$

であるから、$\mathrm{Res}(f;3) = \dfrac{1}{16}$.

11.1.2 極の場合の留数の計算

例 24.12

$f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$ とするとき、(f は $A(0;0,\pi)$ で正則であるから) 0 は f の孤立特異点である。$\mathrm{Res}(f;0)$ は？

Laurent 展開の計算はちょっと面倒である (後で時間があれば紹介する)。

例 24.12

$f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$ とするとき、(f は $A(0;0,\pi)$ で正則であるから) 0 は f の孤立特異点である。$\mathrm{Res}(f;0)$ は？

Laurent 展開の計算はちょっと面倒である (後で時間があれば紹介する)。

0 は f の 1 位の極である ($\because$ 0 は、f の分母 sin の 1 位の零点であり、分子の零点ではない)。ゆえに

$$\mathrm{Res}(f;0)=\lim_{z\to 0}(z-0)f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}=1.$$

11.1.2 極の場合の留数の計算

この流れで、よく使う便利な公式を導いておこう。

定理 24.13 (分母の 1 位の零点における留数)

P と Q は c のある開近傍で正則で、c は P の 1 位の零点とするとき、c は $\dfrac{Q}{P}$ の高々 1 位の極であり

$$\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P}; c\right) = \frac{Q(c)}{P'(c)}.$$

11.1.2 極の場合の留数の計算

この流れで、よく使う便利な公式を導いておこう。

定理 24.13 (分母の 1 位の零点における留数)

P と Q は c のある開近傍で正則で、c は P の 1 位の零点とするとき、c は $\dfrac{Q}{P}$ の高々 1 位の極であり

$$\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};c\right)=\frac{Q(c)}{P'(c)}.$$

証明.

補題 24.7 (2) より、c は f の高々1 位の極である。$P(c)=0$ に注意して、定理 24.8 の公式 (7) を使うと

$$\operatorname{Res}\left(\frac{Q}{P};c\right)=\lim_{z\to c}(z-c)\frac{Q(z)}{P(z)}=\lim_{z\to c}\frac{z-c}{P(z)-P(c)}Q(z)=\frac{Q(c)}{P'(c)}.$$

□

11.1.2 極の場合の留数の計算

特に $P(z)$ が多項式でない場合に便利なので [1]、次の例を強調すると良い。

例 24.14 (解き直し)

$f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$ に対して $\mathrm{Res}(f; 0)$ は？

[1] 共通因数を簡単には消すことが出来ない。

11.1.2 極の場合の留数の計算

特に $P(z)$ が多項式でない場合に便利なので [1]、次の例を強調すると良い。

例 24.14 (解き直し)

$f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$ に対して $\mathrm{Res}(f;0)$ は？

(解答)　0 は分母 $\sin z$ の 1 位の零点であるから、定理 24.13 が適用できて

$$\mathrm{Res}(f;0) = \left.\frac{1}{(\sin z)'}\right|_{z=0} = \frac{1}{\cos 0} = 1.$$

[1] 共通因数を簡単には消すことが出来ない。

11.1.2 極の場合の留数の計算

もちろん多項式の例も見せる。

例 24.15 (頻出する)

$f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$, $c = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ とするとき、$\mathrm{Res}(f; c)$ を求めよ。

11.1.2 極の場合の留数の計算

もちろん多項式の例も見せる。

例 24.15 (頻出する)

$f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$, $c=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ とするとき、$\mathrm{Res}(f;c)$ を求めよ。

(解答)　$P(z)=z^4+1$, $Q(z)=1$ とすると、$f=\dfrac{Q}{P}$. $P(c)=0$, $P'(z)=4z^3$, $P'(c)=4c^3\neq 0$ であるから、c は P の 1 位の零点である。定理 24.13 を適用すると、

$$\mathrm{Res}(f;c)=\left.\frac{Q(z)}{P'(z)}\right|_{z=c}=\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=c}=\left.\frac{z}{4z^4}\right|_{z=c}=\frac{c}{4\cdot(-1)}=-\frac{1+i}{4\sqrt{2}}.\quad\square$$

11.1.2 極の場合の留数の計算

もちろん多項式の例も見せる。

例 24.15 (頻出する)

$f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$, $c=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ とするとき、$\operatorname{Res}(f;c)$ を求めよ。

(解答) $P(z)=z^4+1$, $Q(z)=1$ とすると、$f=\dfrac{Q}{P}$. $P(c)=0$, $P'(z)=4z^3$, $P'(c)=4c^3\neq 0$ であるから、c は P の 1 位の零点である。定理 24.13 を適用すると、

$$\operatorname{Res}(f;c)=\left.\frac{Q(z)}{P'(z)}\right|_{z=c}=\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=c}=\left.\frac{z}{4z^4}\right|_{z=c}=\frac{c}{4\cdot(-1)}=-\frac{1+i}{4\sqrt{2}}.\quad\square$$

(注) $\dfrac{1}{4c^3}=\dfrac{c}{4c^4}=\dfrac{c}{4(-1)}=-\dfrac{c}{4}$ で計算するのはちょっとした工夫であるが、$c=e^{i\pi/4}$ であるから、$\dfrac{1}{4c^3}=\dfrac{1}{4e^{i3\pi/4}}=4e^{-3\pi/4}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}$ とすることも出来る。 $\square$

11.1.2 極の場合の留数の計算

定理 24.16

c が f の 1 位の極、φ が c のある開近傍で正則ならば、c は $f\varphi$ の高々 1 位の極であり

$$\operatorname{Res}(f\varphi; c) = \operatorname{Res}(f; c)\varphi(c). \tag{8}$$

(注意: c の位数が 2 以上のときには、この命題は成り立たない。)

11.1.2 極の場合の留数の計算

定理 24.16

c が f の 1 位の極、φ が c のある開近傍で正則ならば、c は $f\varphi$ の高々 1 位の極であり

$$\mathrm{Res}\,(f\varphi; c) = \mathrm{Res}(f; c)\varphi(c). \tag{8}$$

(注意: c の位数が 2 以上のときには、この命題は成り立たない。)

証明.

(前半) c が f の高々1 位の極であることから、c のある近傍で正則な関数 g が存在して、$f(z) = \dfrac{g(z)}{z-c}$ が成り立つ。

11.1.2 極の場合の留数の計算

定理 24.16

c が f の 1 位の極、φ が c のある開近傍で正則ならば、c は $f\varphi$ の高々 1 位の極であり

$$\operatorname{Res}(f\varphi; c) = \operatorname{Res}(f; c)\varphi(c). \tag{8}$$

(注意: c の位数が 2 以上のときには、この命題は成り立たない。)

証明.

(前半) c が f の高々1 位の極であることから、c のある近傍で正則な関数 g が存在して、$f(z) = \dfrac{g(z)}{z-c}$ が成り立つ。

$$f(z)\varphi(z) = \frac{g(z)\varphi(z)}{z-c}$$

が成り立ち、分母・分子 は $z=c$ の近傍で正則であり、c は分母の 1 位の零点であるから、c は $f\varphi$ の高々1 位の極である。

11.1.2 極の場合の留数の計算

定理 24.16

c が f の 1 位の極、φ が c のある開近傍で正則ならば、c は $f\varphi$ の高々 1 位の極であり

$$\operatorname{Res}(f\varphi; c) = \operatorname{Res}(f; c)\varphi(c). \tag{8}$$

(注意: c の位数が 2 以上のときには、この命題は成り立たない。)

証明.

(前半) c が f の高々1 位の極であることから、c のある近傍で正則な関数 g が存在して、$f(z) = \dfrac{g(z)}{z-c}$ が成り立つ。

$$f(z)\varphi(z) = \frac{g(z)\varphi(z)}{z-c}$$

が成り立ち、分母・分子 は $z=c$ の近傍で正則であり、c は分母の 1 位の零点であるから、c は $f\varphi$ の高々1 位の極である。

(後半)

$$\operatorname{Res}(f\varphi; c) = \lim_{z\to c}(z-c)f(z)\varphi(z) = \lim_{z\to c}(z-c)f(z)\cdot\lim_{z\to c}\varphi(z) = \operatorname{Res}(f; c)\varphi(c).$$

11.1.2 極の場合の留数の計算

例 24.17 (とある問題から)

$f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$, $\varphi(z) = \mathrm{Log}\,\dfrac{z+1}{z-1}$ とする。

φ は $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$ で定義されて正則である ($\because$ $z \notin [-1,1]$ のとき $\dfrac{z+1}{z-1} \notin (-\infty, 0]$ であることが証明できるから。ここでは認めて議論する。)。

c を f の極とするとき、$\mathrm{Res}(f\varphi; c)$ を求めよ。

例 24.17 (とある問題から)

$f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$, $\varphi(z) = \operatorname{Log}\dfrac{z+1}{z-1}$ とする。

φ は $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$ で定義されて正則である ($\because$ $z \notin [-1,1]$ のとき $\dfrac{z+1}{z-1} \notin (-\infty,0]$ であることが証明できるから。ここでは認めて議論する。)。

c を f の極とするとき、$\operatorname{Res}(f\varphi; c)$ を求めよ。

(何でこんなものを求めるのか — 実は $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4+1} = \sum_{c^4+1=0}\operatorname{Res}(f\varphi; c)$ という式が成り立つ。ある種の定積分を留数で計算できるので、これが必要になる。)

例 24.17 (とある問題から)

$f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$, $\varphi(z)=\mathrm{Log}\,\dfrac{z+1}{z-1}$ とする。

φ は $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$ で定義されて正則である ($\because$ $z\notin[-1,1]$ のとき $\dfrac{z+1}{z-1}\notin(-\infty,0]$ であることが証明できるから。ここでは認めて議論する。)。

c を f の極とするとき、$\mathrm{Res}(f\varphi;c)$ を求めよ。

(何でこんなものを求めるのか — 実は $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4+1}=\sum_{c^4+1=0}\mathrm{Res}(f\varphi;c)$ という式が成り立つ。ある種の定積分を留数で計算できるので、これが必要になる。)

$c\in\mathbb{C}\setminus[-1,1]$ であるので、φ は c のある近傍で正則である。ゆえに上の定理 24.16 から

$$\mathrm{Res}(f\varphi;c)=\varphi(c)\,\mathrm{Res}(f;c)=\varphi(c)\left.\frac{1}{(z^4+1)'}\right|_{z=c}=\varphi(c)\frac{c}{4c^4}=-\frac{c}{4}\,\mathrm{Log}\,\frac{c+1}{c-1}.$$

$c=\dfrac{\pm1\pm i}{\sqrt{2}}$ であるが、具体的な計算は面倒なので省略する。 □

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2020/complex2020.pdf (2014〜).