複素関数・同演習 第 23 回

～孤立特異点～

桂田 祐史（かつらだ まさし）

2020 年 12 月 15 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 正則関数の**孤立特異点**を定義する。孤立特異点の周りで Laurent 展開できるので (前回、円環領域で正則な関数はそこで Laurent 級数展開出来ることを示した)、それを利用して、**孤立特異点の分類**を行う。**極とその位数の判定法**を学ぶ (零点とその位数の特徴づけと似ている)。講義ノート [1] の §10.2 の内容である。

  留数を求める話がたくさん出て来る。現時点で留数のありがたみを知らないので、ピンと来ないかもしれない。ちょっと我慢。
- 宿題 11 の解説をします (動画公開は 12 月 15 日 13:30 以降)。

本日の内容・連絡事項

- 正則関数の**孤立特異点を定義**する。孤立特異点の周りで Laurent 展開できるので (前回、円環領域で正則な関数はそこで Laurent 級数展開出来ることを示した)、それを利用して、**孤立特異点の分類**を行う。**極とその位数の判定法**を学ぶ (零点とその位数の特徴づけと似ている)。講義ノート [1] の §10.2 の内容である。

  留数を求める話がたくさん出て来る。現時点で留数のありがたみを知らないので、ピンと来ないかもしれない。ちょっと我慢。
- 宿題 11 の解説をします (動画公開は 12 月 15 日 13:30 以降)。
- 宿題 12 を出します (締め切りは 2021 年 1 月 12 日 (火) 13:30)。
  水曜 2 限の複素関数演習で公開しますが、課題文自体の置き場所は `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/toi12.pdf` です (直接アクセスできます)。

定義 23.1 (孤立特異点, 除去可能特異点, 極, 真性特異点)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ とする。c が f の**孤立特異点** (an isolated singularity) とは、ある正の数 ε が存在して、f は $A(c;0,\varepsilon)$ で正則であり、$D(c;\varepsilon)$ では正則でないことをいう。

定義 23.1 (孤立特異点, 除去可能特異点, 極, 真性特異点)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ とする。c が f の**孤立特異点** (an isolated singularity) とは、ある正の数 ε が存在して、f は $A(c;0,\varepsilon)$ で正則であり、$D(c;\varepsilon)$ では正則でないことをいう。

　このとき、ある $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が一意的に存在して

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\quad (z\in A(c;0,\varepsilon)) \tag{1}$$

が成り立つ。

　a_{-1} を f の c における**留数**と呼び、$\mathrm{Res}(f;c)$ で表す。

展開結果 (1) を用いて孤立特異点を 3 つに分類する。

定義 23.1 (孤立特異点, 除去可能特異点, 極, 真性特異点)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$, $c\in\mathbb{C}$ とする。c が f の**孤立特異点** (an isolated singularity) とは、ある正の数 ε が存在して、f は $A(c;0,\varepsilon)$ で正則であり、$D(c;\varepsilon)$ では正則でないことをいう。

このとき、ある $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が一意的に存在して

$$(1)\qquad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\quad (z\in A(c;0,\varepsilon))$$

が成り立つ。

a_{-1} を f の c における**留数**と呼び、$\mathrm{Res}(f;c)$ で表す。

展開結果 (1) を用いて孤立特異点を 3 つに分類する。

1. c が f の**除去可能特異点** (removable singularity) であるとは

$$(\forall n\in\mathbb{N})\quad a_{-n}=0\quad (\text{i.e. } f \text{ の Laurent 展開の主部が } 0)$$

が成り立つことをいう。

定義 23.1 (つづき)

(ii) c が f の**極** (pole) であるとは、

$$(\exists k \in \mathbb{N})\left(a_{-k} \neq 0 \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : n > k) \quad a_{-n} = 0\right)$$

$$\text{つまり}\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{k} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}, \quad a_{-k} \neq 0.$$

i.e. f の Laurent 展開の主部に 0 でない項が有限個だけ存在する

が成り立つことをいう。またこのとき、k を f の極 c の**位数** (order) と呼び、c は f の **k 位の極**であるという。

定義 23.1 (つづき)

(ii) c が f の**極** (pole) であるとは、

$$(\exists k\in\mathbb{N})\left(a_{-k}\neq 0\wedge(\forall n\in\mathbb{N}:n>k)\quad a_{-n}=0\right)$$

$$\text{つまり}\ f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{k}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n},\quad a_{-k}\neq 0.$$

i.e. f の Laurent 展開の主部に 0 でない項が有限個だけ存在する

が成り立つことをいう。またこのとき、k を f の極 c の**位数** (order) と呼び、c は f の **k 位の極**であるという。

(iii) c が f の**真性特異点** (essential singularity) であるとは

$$(\forall k\in\mathbb{N})(\exists n\in\mathbb{N}:n>k)\quad a_{-n}\neq 0$$

i.e. f の Laurent 展開の主部に 0 でない項が無限個ある

が成り立つことをいう。

注意 23.2

注意 23.2

1. この孤立特異点の定義は、教科書 (神保 [2]) の定義とは異なる。教科書では、「ある正の数 ε が存在して、f が $A(c;0,\varepsilon)$ で正則であること」となっていて、f が $D(c;\varepsilon)$ で正則である (つまり特異性がない) 場合を除外していない。(我々は c が "悪い" 点でないときは孤立特異点とは言わない。こちらの方が多数派である。)

10.2 孤立特異点, 孤立特異点の分類

注意 23.2

1. この孤立特異点の定義は、教科書 (神保 [2]) の定義とは異なる。教科書では、「ある正の数 ε が存在して、f が $A(c;0,\varepsilon)$ で正則であること」となっていて、f が $D(c;\varepsilon)$ で正則である (つまり特異性がない) 場合を除外していない。(我々は c が "悪い" 点でないときは孤立特異点とは言わない。こちらの方が多数派である。)
2. (なぜ「除去可能特異点」と呼ぶか) (i) の場合、任意の $z \in D(c;\varepsilon)$ に対して

$$\widetilde{f}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

は収束するので、$\widetilde{f}$ は (c を含んだ) $D(c;\varepsilon)$ で正則で、

$$f(z) = \widetilde{f}(z) \quad (z \in A(c;0,\varepsilon)), \quad \widetilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & (z \in A(c;0,\varepsilon)) \\ a_0 & (z = c). \end{cases}$$

つまり、$z = c$ で f の値を a_0 であるように定義を修正した $\widetilde{f}$ は、$D(c;\varepsilon)$ で正則である。「除去可能」という言葉のニュアンスが分かる。なお、$a_0 = \lim_{\substack{z \to c \\ z \neq c}} f(z)$ であることに注意する。

注意 23.3 (つづき)

3. (なぜ「極」と呼ぶか) (ii) の場合 $\displaystyle\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}} f(z)=\infty$ が成り立つから。

注意 23.3 (つづき)

3. (なぜ「極」と呼ぶか) (ii) の場合 $\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}} f(z)=\infty$ が成り立つから。

   実は、c を f の孤立特異点とするとき、

   a. c が f の除去可能特異点 $\Leftrightarrow$ 極限 $\lim_{z\to c} f(z)$ が存在する。
   b. c が f の極 $\Leftrightarrow$ $\lim_{z\to c} f(z)=\infty$.
   c. c が f の真性特異点 $\Leftrightarrow$ $\lim_{z\to c} f(z)$ は確定しない (発散かつ $\neq\infty$)。

   が成り立つ ($\Rightarrow$ だけでなく、逆向き $\Leftarrow$ も言えることが重要である)。

10.2 孤立特異点, 孤立特異点の分類

注意 23.3 (つづき)

3. (なぜ「極」と呼ぶか) (ii) の場合 $\lim_{\substack{z\to c\\ z\neq c}} f(z) = \infty$ が成り立つから。

   実は、c を f の孤立特異点とするとき、

   a. c が f の除去可能特異点 $\Leftrightarrow$ 極限 $\lim_{z\to c} f(z)$ が存在する。
   b. c が f の極 $\Leftrightarrow$ $\lim_{z\to c} f(z) = \infty$.
   c. c が f の真性特異点 $\Leftrightarrow$ $\lim_{z\to c} f(z)$ は確定しない (発散かつ $\neq \infty$)。

   が成り立つ ($\Rightarrow$ だけでなく、逆向き $\Leftarrow$ も言えることが重要である)。

   (a), (b) の $\Rightarrow$ の証明は簡単である。実際、

   - 収束冪級数は正則、特に連続なので $\lim_{z\to c} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n = a_0$
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \sim \frac{a_{-k}}{(z-c)^k} \to \infty \ (z\to c).$

注意 23.4 (つづき)

3. (続き) (c) の $\Rightarrow$ の証明には準備 (Riemann の除去可能特異点定理) が必要である (それはこの科目の最後の頃の講義で説明する)。それが出来れば、(a), (b), (c) の $\Leftarrow$ は一斉に証明できる。

注意 23.4 (つづき)

3. (続き) (c) の $\Rightarrow$ の証明には準備 (Riemann の除去可能特異点定理) が必要である (それはこの科目の最後の頃の講義で説明する)。それが出来れば、(a), (b), (c) の $\Leftarrow$ は一斉に証明できる。
4. 真性特異点という言葉は、孤立特異点でない場合にも使われる。「孤立真性特異点とは」と呼ぶ方が紛れがないかもしれない。 □

注意 23.4 (つづき)

3. (続き) (c) の $\Rightarrow$ の証明には準備 (Riemann の除去可能特異点定理) が必要である (それはこの科目の最後の頃の講義で説明する)。それが出来れば、(a), (b), (c) の $\Leftarrow$ は一斉に証明できる。
4. 真性特異点という言葉は、孤立特異点でない場合にも使われる。「孤立真性特異点とは」と呼ぶ方が紛れがないかもしれない。 □

以下、例を紹介するが、まずは、

- 実際に孤立特異点の周りで Laurent 展開してみて、それでどの特異点であるかを判定する例から始める。

それから

- Laurent 展開をサボるやり方を考える。

例 23.5

$f(z) = \dfrac{1}{z-2}$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{2\})$. f は $\mathbb{C} \setminus \{2\}$ で正則である。ゆえに 2 は f の孤立特異点で、それ以外に孤立特異点は存在しない。

例 23.5

$f(z)=\dfrac{1}{z-2}$ $(z\in\mathbb{C}\setminus\{2\})$. f は $\mathbb{C}\setminus\{2\}$ で正則である。ゆえに 2 は f の孤立特異点で、それ以外に孤立特異点は存在しない。

$\mathbb{C}\setminus\{2\}$ は円環領域 $A(2;0,+\infty)$ である。f の 2 のまわりの Laurent 展開は $f(z)=\dfrac{1}{z-2}$ (f 自身) である。実際、

$$a_{-1}:=1,\quad a_n:=0\quad(n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\})$$

とすると

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-2)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-2)^n}\quad(z\in A(2;0,+\infty)).$$

例 23.5

$f(z)=\dfrac{1}{z-2}$ $(z\in\mathbb{C}\setminus\{2\})$. f は $\mathbb{C}\setminus\{2\}$ で正則である。ゆえに 2 は f の孤立特異点で、それ以外に孤立特異点は存在しない。

$\mathbb{C}\setminus\{2\}$ は円環領域 $A(2;0,+\infty)$ である。f の 2 のまわりの Laurent 展開は $f(z)=\dfrac{1}{z-2}$ (f 自身) である。実際、

$$a_{-1}:=1,\quad a_n:=0\quad (n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\})$$

とすると

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-2)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-2)^n}\quad (z\in A(2;0,+\infty)).$$

Laurent 展開の主部は $\dfrac{1}{z-2}$. $\mathrm{Res}(f;2)=a_{-1}=1$. 2 は f の 1 位の極である。 □

例 23.6

(2)
$$f(z)=\frac{3}{(z-1)^2}\quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}).$$

f は $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ で正則である。ゆえに 1 は f の唯一の孤立特異点である。
$\mathbb{C}\setminus\{1\}$ は円環領域 $A(1;0,+\infty)$ である。(2) 自身が f の 1 のまわりの Laurent 展開である。実際、
$$a_{-2}:=3,\quad a_n:=0\quad (n\in\mathbb{Z}\setminus\{-2\})$$
とすると
$$\frac{3}{(z-1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-1)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-1)^n}\quad (z\in A(1;0,+\infty)).$$

例 23.6

(2)
$$f(z)=\frac{3}{(z-1)^2}\quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}).$$

f は $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ で正則である。ゆえに 1 は f の唯一の孤立特異点である。
$\mathbb{C}\setminus\{1\}$ は円環領域 $A(1;0,+\infty)$ である。(2) 自身が f の 1 のまわりの Laurent 展開である。実際、

$$a_{-2}:=3,\quad a_n:=0\quad (n\in\mathbb{Z}\setminus\{-2\})$$

とすると

$$\frac{3}{(z-1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-1)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-1)^n}\quad (z\in A(1;0,+\infty)).$$

Laurent 展開の主部は $\dfrac{3}{(z-1)^2}$. $\mathrm{Res}(f;1)=a_{-1}=0$. 1 は f の 2 位の極である。 □

以下、一般の有理関数を考えよう。

例 23.7 (有理関数の極の位数、留数)

有理関数 $f(z) = \dfrac{z^3 - 7z^2 + 26z - 30}{z^3 - 5z^2 + 3z + 9}$ について、

例 23.7 (有理関数の極の位数、留数)

有理関数 $f(z) = \dfrac{z^3 - 7z^2 + 26z - 30}{z^3 - 5z^2 + 3z + 9}$ について、まず

$$f(z) = 1 + \frac{2}{z-3} + \frac{3}{(z-3)^2} - \frac{4}{z+1}$$

と部分分数分解する。f は $\mathbb{C} \setminus \{3, -1\}$ で正則であり、3 と -1 は孤立特異点である。
$1 - \dfrac{4}{z+1}$ は $D(3;4)$ で正則であり、3 の周りに冪級数展開できる (やり方は説明済み):

$$1 - \frac{4}{z+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4^n}(z-3)^n \quad (z \in D(3;4) \text{ すなわち } |z-3| < 4).$$

ゆえに

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4^n}(z-3)^n + \frac{2}{z-3} + \frac{3}{(z-3)^2} \quad (0 < |z-3| < 4).$$

これは f の 3 の周りの Laurent 展開である。ゆえに 3 は f の 2 位の極であり、
$\mathrm{Res}(f;3) = 2$.

例 23.8 (有理関数の極の位数、留数 (続き))

一般に、有理関数は分母が 0 となる点 c を孤立特異点に持ち (分母と分子に共通因数がないとする)、c の周りに Laurent 展開できることが分かる。Laurent 展開が求まれば、それから c の極としての位数や留数 $\mathrm{Res}(f;c)$ が得られる。

例 23.8 (有理関数の極の位数、留数 (続き))

一般に、有理関数は分母が 0 となる点 c を孤立特異点に持ち (分母と分子に共通因数がないとする)、c の周りに Laurent 展開できることが分かる。Laurent 展開が求まれば、それから c の極としての位数や留数 $\mathrm{Res}(f;c)$ が得られる。

しかし、極としての位数や留数を求めるだけならば、Laurent 展開を具体的に求める必要がない。孤立特異点 -1 について、それを実行してみよう。

$1+\dfrac{2}{z-3}+\dfrac{3}{(z-3)^2}$ は $D(-1;4)$ で正則であるから、-1 の周りに冪級数展開できる:

$$(\exists\{a_n\}_{n\geq 0})\quad 1+\frac{2}{z-3}+\frac{3}{(z-3)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z+1)^n\quad (z\in D(-1;4) \text{ すなわち } |z+1|<4).$$

例 23.8 (有理関数の極の位数、留数 (続き))

一般に、有理関数は分母が 0 となる点 c を孤立特異点に持ち (分母と分子に共通因数がないとする)、c の周りに Laurent 展開できることが分かる。Laurent 展開が求まれば、それから c の極としての位数や留数 $\mathrm{Res}(f;c)$ が得られる。

しかし、極としての位数や留数を求めるだけならば、Laurent 展開を具体的に求める必要がない。孤立特異点 -1 について、それを実行してみよう。

$1+\dfrac{2}{z-3}+\dfrac{3}{(z-3)^2}$ は $D(-1;4)$ で正則であるから、-1 の周りに冪級数展開できる:

$$(\exists\{a_n\}_{n\ge 0})\quad 1+\frac{2}{z-3}+\frac{3}{(z-3)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z+1)^n\quad (z\in D(-1;4)\ \text{すなわち}\ |z+1|<4).$$

これから

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z+1)^n-\frac{4}{z+1}\quad (0<|z+1|<4).$$

これが f の -1 の周りの Laurent 展開である。a_n を具体的に求めていないが、-1 は f の 1 位の極で、$\mathrm{Res}(f;-1)=-4$ であることがわかる。結局、部分分数分解をした段階で、これらが分かることに注意しよう。

例 23.9 (有理関数以外の極の例)

$f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\} = A(0; 0, +\infty)$ で正則である。ゆえに 0 が f の唯一の孤立特異点である。

例 23.9 (有理関数以外の極の例)

$f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\} = A(0; 0, +\infty)$ で正則である。ゆえに 0 が f の唯一の孤立特異点である。

sin の 0 のまわりの冪級数展開 $\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$ $(z \in \mathbb{C})$ から

$$(\star) \quad f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k-1} + \frac{1}{z} \quad (0 < |z| < +\infty).$$

これが f の 0 のまわりの Laurent 展開である。

例 23.9 (有理関数以外の極の例)

$f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$ は $\mathbb{C}\setminus\{0\}=A(0;0,+\infty)$ で正則である。ゆえに 0 が f の唯一の孤立特異点である。

sin の 0 のまわりの冪級数展開 $\sin z=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1}$ $(z\in\mathbb{C})$ から

$$(\star)\quad f(z)=\frac{\sin z}{z^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k-1}+\frac{1}{z}\quad (0<|z|<+\infty).$$

これが f の 0 のまわりの Laurent 展開である。実際

$$c=0,\quad a_n=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} & (n\geq 0,\ n \text{ は奇数のとき。} k=\frac{n+1}{2} \text{ とおくと } k\in\mathbb{Z},\ n=2k-1)\\ 1 & (n=-1)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

とおくと、$(\star)$ の右辺は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ の形をしている。また、この Laurent 展開の主部は $\dfrac{1}{z}$ であり、0 は f の 1 位の極、$\mathrm{Res}(f;0)=a_{-1}=1$. □

例 23.10 (除去可能特異点)

$f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\} = A(0; 0, +\infty)$ で正則である。ゆえに 0 が f の唯一の孤立特異点である。
0 の周りの Laurent 展開は

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k} \quad (z \in A(0; 0, +\infty)).$$

上とほとんど同じなので、議論を少しスキップして、

例 23.10 (除去可能特異点)

$f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ は $\mathbb{C}\setminus\{0\}=A(0;0,+\infty)$ で正則である。ゆえに 0 が f の唯一の孤立特異点である。
0 の周りの Laurent 展開は

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k}\quad (z\in A(0;0,+\infty)).$$

上とほとんど同じなので、議論を少しスキップして、主部は 0 であるから、0 は f の除去可能特異点である。 □

例 23.11 (孤立真性特異点)

$f(z) = \exp\dfrac{1}{z}$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\} = A(0; 0, +\infty)$ で正則である。ゆえに 0 が f の唯一の孤立特異点である。

例 23.11 (孤立真性特異点)

$f(z)=\exp\dfrac{1}{z}$ は $\mathbb{C}\setminus\{0\}=A(0;0,+\infty)$ で正則である。ゆえに 0 が f の唯一の孤立特異点である。

$$\exp\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\zeta^n \quad (\zeta\in\mathbb{C})$$

であるから

$$f(z)=\exp\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} \quad (0<|z|<+\infty).$$

例 23.11 (孤立真性特異点)

$f(z)=\exp\dfrac{1}{z}$ は $\mathbb{C}\setminus\{0\}=A(0;0,+\infty)$ で正則である。ゆえに 0 が f の唯一の孤立特異点である。

$$\exp\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\zeta^n \quad (\zeta\in\mathbb{C})$$

であるから

$$f(z)=\exp\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} \quad (0<|z|<+\infty).$$

これは f の 0 のまわりの Laurent 展開である (実際、$a_n=0$ $(n\in\mathbb{N})$, $a_0=1$, $a_{-n}=\dfrac{1}{n!}$ $(n\in\mathbb{N})$ とすると$\cdots$)。

例 23.11 (孤立真性特異点)

$f(z)=\exp\dfrac{1}{z}$ は $\mathbb{C}\setminus\{0\}=A(0;0,+\infty)$ で正則である。ゆえに 0 が f の唯一の孤立特異点である。

$$\exp\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\zeta^n \quad (\zeta\in\mathbb{C})$$

であるから

$$f(z)=\exp\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} \quad (0<|z|<+\infty).$$

これは f の 0 のまわりの Laurent 展開である (実際、$a_n=0$ $(n\in\mathbb{N})$, $a_0=1$, $a_{-n}=\dfrac{1}{n!}$ $(n\in\mathbb{N})$ とすると$\cdots$)。

この Laurent 展開の主部は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}$ であり、(0 でない項が無限個あるので) 0 は f の真性特異点である。また $\mathrm{Res}(f;1)=a_{-1}=\dfrac{1}{1!}=1.$ □

例 23.12 (孤立特異点でない「特異点」)

$$f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}.$$

f は $z=0$ で定義されない (明らか)。

それ以外に $\sin\frac{1}{z}=0$ となる z に対しても定義されない。つまり、この f は、$\{0\}\cup\left\{\frac{1}{n\pi}\;\middle|\;n\in\mathbb{Z}\right\}$ に属する点では定義されない。

0 は f の孤立特異点ではない。これも真性特異点と呼ばれる。 □

Laurent 展開を求めるのは結構大変というか手間がかかる。なるべく求めずに色々なことを分かりたい (特異点の種類や留数が分かれば十分がことが多い)。

定理 23.13 (k 位の極であるための条件)

$c \in \mathbb{C}$, U は c のある開近傍、f は $U \setminus \{c\}$ で正則、$k \in \mathbb{N}$ とする。このとき、(i), (ii) は同値である。

(i) c は f の k 位の極である。

(ii) U で正則な関数 g が存在して $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-c)^k}$ $(z \in U \setminus \{c\})$ かつ $g(c) \neq 0$.

定理 23.13 (k 位の極であるための条件)

$c\in\mathbb{C}$, U は c のある開近傍、f は $U\setminus\{c\}$ で正則、$k\in\mathbb{N}$ とする。このとき、(i), (ii) は同値である。

(i) c は f の k 位の極である。

(ii) U で正則な関数 g が存在して $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-c)^k}$ $(z\in U\setminus\{c\})$ かつ $g(c)\neq 0$.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii) c が f の k 位の極とすると

$$(\exists R>0)(\exists\{a_n\}_{n\geq -k})\quad f(z)=\sum_{n=-k}^{\infty}a_n(z-c)^n\quad (0<|z-c|<R),\quad a_{-k}\neq 0.$$

定理 23.13 (k 位の極であるための条件)

$c \in \mathbb{C}$, U は c のある開近傍、f は $U \setminus \{c\}$ で正則、$k \in \mathbb{N}$ とする。このとき、(i), (ii) は同値である。

(i) c は f の k 位の極である。

(ii) U で正則な関数 g が存在して $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-c)^k}$ $(z \in U \setminus \{c\})$ かつ $g(c) \neq 0$.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii) c が f の k 位の極とすると

$$(\exists R > 0)(\exists \{a_n\}_{n \geq -k}) \quad f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (0 < |z-c| < R), \quad a_{-k} \neq 0.$$

このとき

$$(z-c)^k f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-c)^{n+k} = \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'-k} (z-c)^{n'} \quad (0 < |z-c| < R).$$

定理 23.13 (k 位の極であるための条件)

$c \in \mathbb{C}$, U は c のある開近傍、f は $U \setminus \{c\}$ で正則、$k \in \mathbb{N}$ とする。このとき、(i), (ii) は同値である。

(i) c は f の k 位の極である。

(ii) U で正則な関数 g が存在して $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-c)^k}$ $(z \in U \setminus \{c\})$ かつ $g(c) \neq 0$.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii) c が f の k 位の極とすると

$$(\exists R > 0)(\exists \{a_n\}_{n \geq -k}) \quad f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (0 < |z-c| < R), \quad a_{-k} \neq 0.$$

このとき

$$(z-c)^k f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-c)^{n+k} = \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'-k} (z-c)^{n'} \quad (0 < |z-c| < R).$$

$$g(z) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k} (z-c)^n & (z \in D(c; R)) \\ (z-c)^k f(z) & (z \in U \setminus D(c; R)) \end{cases}$$

とおくと、g は条件を満たす ($g(c) = a_{-k} \neq 0$ に注意)。

10.3 極とその位数の特徴付け

証明 (続き) (ii) ⇒ (i) ある正の数 R が存在して、$D(c;R) \subset U$. g は $D(c;R)$ で正則であるから、$\{b_n\}_{n\geq 0}$ が存在して

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n \quad (z \in D(c;R)).$$

証明 (続き) (ii) $\Rightarrow$ (i) ある正の数 R が存在して、$D(c;R) \subset U$. g は $D(c;R)$ で正則であるから、$\{b_n\}_{n\geq 0}$ が存在して

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n \quad (z \in D(c;R)).$$

このとき

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^k} &= \frac{b_0}{(z-c)^k} + \frac{b_1}{(z-c)^{k-1}} + \cdots + b_k + b_{k+1}(z-c) + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+k}(z-c)^n + \sum_{n=1}^{k} \frac{b_{k-n}}{(z-c)^n}, \end{aligned}$$

$\dfrac{1}{(z-c)^k}$ の係数は $b_{k-n} = b_0 = g(c) \neq 0$. ゆえに c は f の k 位の極である。 □

証明 (続き) (ii) ⇒ (i) ある正の数 R が存在して、$D(c;R) \subset U$. g は $D(c;R)$ で正則であるから、$\{b_n\}_{n\geq 0}$ が存在して

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n \quad (z \in D(c;R)).$$

このとき

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{g(z)}{(z-c)^k} &= \frac{b_0}{(z-c)^k} + \frac{b_1}{(z-c)^{k-1}} + \cdots + b_k + b_{k+1}(z-c) + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+k}(z-c)^n + \sum_{n=1}^{k} \frac{b_{k-n}}{(z-c)^n}, \end{aligned}$$

$\dfrac{1}{(z-c)^k}$ の係数は $b_{k-n} = b_0 = g(c) \neq 0$. ゆえに c は f の k 位の極である。 □

k 位の零点と対比して覚えることを勧める ($f(z) = (z-c)^k g(z)$, $g(c) \neq 0$)。

証明 (続き) (ii) $\Rightarrow$ (i) ある正の数 R が存在して、$D(c;R) \subset U$. g は $D(c;R)$ で正則であるから、$\{b_n\}_{n\geq 0}$ が存在して

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c)^n \quad (z \in D(c;R)).$$

このとき

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{g(z)}{(z-c)^k} = \frac{b_0}{(z-c)^k} + \frac{b_1}{(z-c)^{k-1}} + \cdots + b_k + b_{k+1}(z-c) + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+k}(z-c)^n + \sum_{n=1}^{k} \frac{b_{k-n}}{(z-c)^n}, \end{aligned}$$

$\dfrac{1}{(z-c)^k}$ の係数は $b_{k-n} = b_0 = g(c) \neq 0$. ゆえに c は f の k 位の極である。 □

k 位の零点と対比して覚えることを勧める ($f(z) = (z-c)^k g(z)$, $g(c) \neq 0$)。

Laurent 展開をしなくても、極かどうか、その位数は何か、分かることが重要である。

例 23.14

$$f(z) = \frac{(z-3)^2(z-4)^3}{z^3(z-1)^2(z-2)}$$

の極とその位数は？

例 23.14

$$f(z) = \frac{(z-3)^2(z-4)^3}{z^3(z-1)^2(z-2)}$$

の極とその位数は？
0 は f の 3 位の極。1 は f の 2 位の極。2 は f の 1 位の極。

例 23.14

$$f(z) = \frac{(z-3)^2(z-4)^3}{z^3(z-1)^2(z-2)}$$

の極とその位数は？
0 は f の 3 位の極。1 は f の 2 位の極。2 は f の 1 位の極。

それでは

$$g(z) = \frac{(z-2)(z-3)^2(z-4)^3}{z^3(z-1)^2(z-2)}$$

は？

例 23.14

$$f(z) = \frac{(z-3)^2(z-4)^3}{z^3(z-1)^2(z-2)}$$

の極とその位数は？
0 は f の 3 位の極。1 は f の 2 位の極。2 は f の 1 位の極。

それでは

$$g(z) = \frac{(z-2)(z-3)^2(z-4)^3}{z^3(z-1)^2(z-2)}$$

は？実は、2 は f の除去可能特異点である。実際

$$h(z) := \frac{(z-3)^2(z-4)^3}{z^3(z-1)^2}$$

とおくと、$g(z) = h(z)$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{2\})$ であり、h は 2 の近傍 $D(2;1)$ で正則であるから、

$$(\exists \{a_n\}_{n \geq 0})\ h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n \quad (z \in D(2;1)).$$

ゆえに $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n$ $(z \in A(2;0,1))$. ゆえに 2 は g の除去可能特異点である。 □

余談　Goursat の定理

「円盤に置ける Cauchy の積分公式」f が閉円盤 $\overline{D}(c;R)$ を含む開集合で正則ならば

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \quad (|z-c|<R)$$

が成り立つことは紹介済みであるが、右辺は何回でも積分記号下の微分が出来る。すなわち

$$(\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\})\quad f^{(n)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=R}\left(\frac{d}{dz}\right)^n\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta.$$

この事実を **Goursat の定理**と呼ぶことがある (事実はもちろん知っていたが名前は知らなかった)。

これから、f の c における冪級数展開 $f(z)=\sum_{n=0}^{n}a_n(z-c)^n$ の係数は

$$a_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}d\zeta.$$

この式はすでに別の方法で証明してあるので、別証ということになるが、

Cauchy の積分公式を n 回微分して、$z=c$ を代入して $n!$ で割った式

ということを知っておくと、思い出しやすいかもしれない。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2020/complex2020.pdf` (2014〜).

[2] 神保道夫（じんぼう）：複素関数入門, 現代数学への入門, 岩波書店 (2003).