

# 複素関数・同演習 第22回

～一致の定理 (2), Laurent 展開～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

2020年12月9日

# 目次

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 正則関数の性質 (前半)
  - 一致の定理 (続き)
- 3 Laurent 展開、孤立特異点、留数
  - 円環領域における正則関数の Laurent 展開, 留数
- 4 参考文献

- 前回紹介した一致の定理 (定理 21.9) の証明を解説する。
- 円環領域で正則な関数は Laurent 展開できる、という定理を紹介する。 Laurent 展開が何の役に立つかの説明 (孤立特異点における留数の応用は、複素関数が一番役に立つところ、と考えている人が結構いるだろう) は次回以降になる。簡単な例をゆっくり解説する。  
講義ノート [1] の §10.1 の内容である。
- 宿題 11 を出します (締め切りは 12 月 8 日 13:30)。

## 9.2 一致の定理 (復習)

次の定理は前回既に紹介してある。

### 定理 21.9 (一致の定理 (the identity theorem), 一意接続の定理)

$D$  は  $\mathbb{C}$  の領域 (弧連結な開集合)、 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  と  $g: D \rightarrow \mathbb{C}$  は正則、 $c \in D$ , 複素数列  $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は二条件

①  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c$

②  $\forall n \in \mathbb{N}$  に対して  $z_n \in D$  かつ  $z_n \neq c$  かつ  $f(z_n) = g(z_n)$

を満たすとするとき、 $D$  全体で  $f = g$ .

以下で紹介する証明は2つのステップからなる。

後半はトポロジーの予備知識があれば、見通しが良く、長くは感じないだろうが、初めてだと理解するのは大変かもしれない(こういうのは複数回ふれる必要があると思う)。

一応全部書いておくが、前半 (Step 1) を理解することを目標としよう。

## 9.2 一致の定理

### 定理 21.9 の証明

$f - g$  を新たに  $f$  と置いて考えることで、 $g = 0$  の場合に証明すれば良いことが分かる。

**Step 1.**  $D$  は開集合であるから、 $(\exists \varepsilon > 0) \overline{D(c; \varepsilon)} \subset D$ . 正則関数の冪級数展開可能性より、 $\{a_n\}_{n \geq 0}$  が存在して、

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n \quad (z \in D(c; \varepsilon)).$$

まずこの円盤  $D(c; \varepsilon)$  で  $f = 0$  であることを示す。

実は任意の  $n$  に対して  $a_n = 0$  である。実際、もしそうでないと仮定すると、 $\exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  s.t.  $a_n \neq 0$ . そのような  $n$  のうち、最小のものを  $k$  とおくと、

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0, \quad a_k \neq 0.$$

すると

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - c)^n = (z - c)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - c)^n \quad (z \in D(c; \varepsilon)).$$

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - c)^n \text{ は } z \in D(c; \varepsilon) \text{ で収束し、} g(z_n) = \frac{f(z_n)}{(z_n - c)^k} = \frac{0}{(z_n - c)^k} = 0.$$

## 9.2 一致の定理

### 定理 21.9 の証明 (続き)

ゆえに

$$a_k = g(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

これは矛盾である。ゆえに任意の  $n$  に対して  $a_n = 0$ 。ゆえに  $f(z) = 0$  ( $z \in D(c; \varepsilon)$ )。

**Step 2.**

$$D_0 := \left\{ z \in D \mid (\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) \neq 0 \right\}, \quad D_1 := \left\{ z \in D \mid (\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) = 0 \right\}$$

とおくと (簡単な論理の法則を用いて)

$$D_0 \cup D_1 = D, \quad D_0 \cap D_1 = \emptyset.$$

実は  $D_0$  と  $D_1$  は開集合である (理由は次のスライド)。

また  $c \in D_1$  であるから  $D_1 \neq \emptyset$ 。

この後に紹介する命題 22.1 (これはトポロジーでは常識) より、 $D_0 = \emptyset$ ,  $D_1 = D$ 。ゆえに  $f = 0$  in  $D$ 。

## 9.2 一致の定理

### 定理 21.9 の証明 (続き)

$D_0$  は開集合であること  $f^{(n)}$  が連続関数であることから、 $D_0$  は開集合であることが導かれる。実際、 $z_0 \in D_0$  とするとき、 $(\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z_0) \neq 0$ 。

- $D$  が開集合であることから、 $(\exists \delta_1 > 0) D(z_0; \delta_1) \subset D$ 。
- $\varepsilon := |f^{(n)}(z_0)|$  とおくと、 $\varepsilon > 0$  であり、 $f^{(n)}$  は連続であるから、 $(\exists \delta_2 > 0) (\forall z \in D: |z - z_0| < \delta_2) |f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_0)| < \varepsilon$ 。このとき

$$|f^{(n)}(z)| = |f^{(n)}(z_0) - f^{(n)}(z_0) + f^{(n)}(z)| \geq |f^{(n)}(z_0)| - |f^{(n)}(z_0) - f^{(n)}(z)| > \varepsilon - \varepsilon = 0.$$

ゆえに  $f^{(n)}(z) \neq 0$ 。従って  $z \in D_0$ 。

$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$  とおくと、 $\delta > 0$  かつ  $D(z; \delta) \subset D_0$ 。ゆえに  $D_0$  は開集合である。

$D_1$  は開集合であること 実際、 $z_0 \in D_1$  ならば、 $(\exists R > 0) (\exists \{a_n\}_{n \geq 0}: \text{複素数列})$

$(\forall z \in D(z_0; R)) f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ 。ところが  $z_0 \in D_1$  より、任意の  $n$  に対して

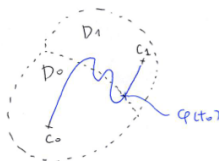
$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = 0$  なので、 $f(z) = 0$ 。ゆえに  $D(z_0; R) \subset D_1$ 。ゆえに  $D_1$  は開集合である。

## 9.2 一致の定理

### 命題 22.1 (弧連結な開集合は連結)

$D$  は  $\mathbb{C}$  の弧連結な開集合、 $D_0$  と  $D_1$  は  $\mathbb{C}^n$  の開集合で  $D_0 \cup D_1 = D$ ,  $D_0 \cap D_1 = \emptyset$  とすると、 $D_0$  と  $D_1$  のいずれかが空集合である。

**命題 22.1 の証明** 背理法を用いる。 $D_0 \neq \emptyset$  かつ  $D_1 \neq \emptyset$  と仮定して矛盾を導く。  
 $c_0 \in D_0$ ,  $c_1 \in D_1$  を取る。 $D$  は弧連結であるから、 $\varphi(0) = c_0$ ,  $\varphi(1) = c_1$  を満たす連続な  $\varphi: [0, 1] \rightarrow \Omega$  が存在する。



$$I_0 := \{t \in [0, 1] \mid \varphi(t) \in D_0\}, \quad I_1 := \{t \in [0, 1] \mid \varphi(t) \in D_1\}$$

とおくと

$$I_0 \cup I_1 = [0, 1], \quad I_0 \cap I_1 = \emptyset, \quad 0 \in I_0, \quad 1 \in I_1.$$

$D_0$  と  $D_1$  は開集合、 $\varphi$  は連続であるから、 $(\exists \delta_0, \delta_1 > 0)$   $[0, \delta_0] \subset I_0 \wedge [1 - \delta_1, 1] \subset I_1$ .  
 $t_0 := \sup I_0$  とおくと、 $\delta_0 \leq t_0 \leq 1 - \delta_1$ . ゆえに  $0 < t_0 < 1$ .



## 9.2 一致の定理

**命題 22.1 の証明 (続き)**  $t_0$  が  $I_0, I_1$  のどちらに属するか考えて矛盾を導く。

$t_0 \in I_0$  の場合、 $D_0$  が開集合で  $\varphi$  が連続であることから、 $(\exists \varepsilon_1 \in (0, d))$   
 $(t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1) \subset I_0$ . すると  $t_0 = \sup I_0 \geq t_0 + \varepsilon_1$  となり、矛盾が生じる。

$t_0 \in I_1$  の場合、 $D_0$  が開集合で  $\varphi$  が連続であることから、 $(\exists \varepsilon_2 \in (0, d))$   
 $(t_0 - \varepsilon_2, t_0 + \varepsilon_2) \subset I_1$ .  $I_1$  と共通部分のない  $I_0$  の上限が  $I_1$  の内部にあるのは矛盾である。 □

# 10 Laurent 展開、孤立特異点、留数

## 10.1 円環領域における正則関数の Laurent 展開, 留数

円盤で正則な関数は冪級数展開できることが分かった。円盤を円環に置き換えてみる。

### 定義 22.2 (円環領域)

$c \in \mathbb{C}$ ,  $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$  に対して

$$A(c; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - c| < R_2\}$$

を  $c$  を中心とする **円環領域** (annulus, annular domain) と呼ぶ。

$$\bar{A}(c; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 \leq |z - c| \leq R_2\} \quad (\text{ただし } R_2 < +\infty).$$

(注意:  $R_2 = +\infty$  のときは、 $z \in \mathbb{C}$  であるから  $|z - c| < +\infty$  ということになる。)

「円環」という言葉にふさわしいのは、 $0 < R_1 < R_2 < +\infty$  の場合だけだろう。しかし、Laurent 級数の収束・発散を扱うときは、(収束円のときと同様に)  $R_1 = 0$  や  $R_2 = +\infty$  の場合も考えるのが有効である。

実は  $R_1 = 0$  の場合が頻出する。このとき  $A(c; R_1, R_2)$  は円盤  $D(c; R_2)$  から  $c$  を除いたものである。すなわち

$$A(c; 0, R_2) = D(c; R_2) \setminus \{c\}.$$

## 10.1 円環領域における正則関数の Laurent 展開, 留数

### 定理 22.3 (円環領域で正則な関数は Laurent 展開出来る)

$c \in \mathbb{C}$ ,  $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$ ,  $f: A(c; R_1, R_2) \rightarrow \mathbb{C}$  は正則とするとき、ある複素数列  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  が一意的に存在して

$$(1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (z \in A(c; R_1, R_2)).$$

右辺の級数は、 $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$  を満たす任意の  $r_1, r_2$  に対して、 $\bar{A}(c; r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 \leq |z-c| \leq r_2\}$  で一様絶対収束する。

(1) が成り立つとき、 $R_1 < r < R_2$  を満たす任意の  $r$  に対して

$$(2) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}} dz \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

## 10.1 円環領域における正則関数の Laurent 展開, 留数

### 定義 22.4 (Laurent 展開)

$c \in \mathbb{C}$ ,  $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$ ,  $f: A(c; R_1, R_2) \rightarrow \mathbb{C}$  は正則とするとき

$$(3) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (z \in A(c; R_1, R_2))$$

を満たす  $\{a_n\}$  が一意的に存在する。(3) を、 $f$  の  $A(c; R_1, R_2)$  における **Laurent 級数展開** と呼ぶ。

特に  $R_1 = 0$  のとき、 $f$  の  $c$  のまわりの ( $c$  における) **Laurent 級数展開** と呼ぶ。また、このとき  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$  を  $f$  の Laurent 級数展開の **主部** (**主要部**, the principal part) と呼ぶ。また、 $a_{-1}$  を  $f$  の  $c$  における **留数** (residue) と呼び、 $\text{Res}(f; c)$  あるいは  $\text{Res}_{z=c} f(z) dz$  で表す。

## 10.1 円環領域における正則関数の Laurent 展開, 留数

### 注意

- ① Laurent 展開は Taylor 展開の一般化である。Taylor 展開は Laurent 展開でもある。 $f$  が  $D(c; R)$  で正則と仮定すると、Taylor 展開できる:

$$(\exists \{a_n\}_{n \geq 0}) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (|z-c| < R).$$

$f$  は  $A(c; 0, R)$  で正則でもあるので、上の定理から Laurent 級数展開できる:

$$(\exists \{a'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a'_{-n}}{(z-c)^n} \quad (0 < |z-c| < R).$$

Laurent 展開の一意性から、 $n \geq 0$  のとき  $a'_n = a_n$ ,  $n < 0$  のとき  $a'_n = 0$ .

Taylor 展開では

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

が成り立つが、Laurent 級数展開では  $f^{(n)}(c)$  が存在しない場合があることに注意。

# 10.1 Laurent 展開

## 例 22.5 (簡単な関数でゆっくりと)

$$(4) \quad f(z) = \frac{1}{z-2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}).$$

まず  $c = 2$  の周りの Laurent 展開を求めよう。実は (4) 自身が  $f$  の  $A(2; 0, +\infty)$  での Laurent 展開である。

$$(実際、 $a_{-1} = 1$ ,  $a_n = 0$  ( $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ ) とおくと、 $\frac{1}{z-2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ .)$$

$c = 0$  の周りの Laurent 展開は？  $f$  は  $D(0; 2)$  で正則であるから、そこで冪級数展開出来る。実際

$$f(z) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 2).$$

もちろん

$$(5) \quad f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (0 < |z| < 2, \text{ i.e. } z \in A(0; 0, 2)).$$

## 10.1 Laurent 展開

### 例 22.5 (つづき)

一方、 $f$  は  $2 < |z| < +\infty$  つまり  $A(0; 2, +\infty)$  でも  $f$  は正則であるから、そこで Laurent 展開出来る。実際

$$(6) \quad f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n}$$

$(2 < |z| < +\infty \text{ i.e. } z \in A(0; 2, +\infty)). \quad \square$

# 10.1 円環領域における正則関数の Laurent 展開, 留数

## 注意 (続き)

- ② 係数の公式 (2)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}} dz$$

は、 $D(c; R)$  で正則な関数の Taylor 展開の係数の式と同じ形である。「覚えられない」とギブ・アップしないように。

この式を使って (線積分を計算することによって)  $a_n$  を求めることは稀である。(むしろ  $a_n$  を計算して積分を求める、と逆方向に利用することが多い。)

- ③ (1) を  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$  と書く (1つの  $\sum$  で済ませる) こともあるが、

$$\lim_{N_1, N_2 \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N_1}^{N_2} a_n(z-c)^n$$

という意味である。Fourier 級数の場合の

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

とは異なる。



## 10.1 円環領域における正則関数の Laurent 展開, 留数

④ 負の番号からなる項  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$  について、次のどれか 1 つ (だけ) が成立する。

- Ⓐ 任意の  $z \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$  に対して収束する。
- Ⓑ ある  $R \in (0, +\infty)$  が存在して、 $|z-c| > R$  ならば収束、 $|z-c| < R$  ならば発散する。
- Ⓒ 任意の  $z \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$  に対して発散する。

(i) のとき  $R=0$ , (iii) のとき  $R=+\infty$  とすると、いずれの時も

$$|z-c| > R \text{ ならば収束、} |z-c| < R \text{ ならば発散する}$$

とまとめられる。

おおざっぱに言うと、冪級数のときとは、不等号の向きが反対、ということ。

# 10.1 円環領域における正則関数の Laurent 展開, 留数

④ (つづき) さらに

$(\forall r > R) \quad \bar{A}(c; r, +\infty) = \{z \in \mathbb{R} \mid |z - c| \geq r\}$  で一様絶対収束

が成り立つ。実際  $\zeta := \frac{1}{z - c}$  とおくと

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - c)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n.$$

右辺は  $\zeta$  についての冪級数であるから、 $0 \leq \rho \leq +\infty$  を満たすある  $\rho$  が存在して

$|\zeta| < \rho$  ならば収束、 $|\zeta| > \rho$  ならば発散、 $0 < r < \rho$  を満たす任意の  $r$  に対して  $\bar{D}(0; r) = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| \leq r\}$  で一様に絶対収束する。

ゆえに

$|z - c| > \frac{1}{\rho}$  ならば収束、 $|z - c| < \frac{1}{\rho}$  ならば発散、 $\frac{1}{\rho} < r < +\infty$  を満たす任意の  $r$  に対して  $|z - c| \geq r$  の範囲で一様に絶対収束する。

ゆえに  $R := \frac{1}{\rho}$  とおけば良い。

□

## 10.1 Laurent 展開

実は Laurent 展開は項別微分もできる。

### 例 22.6

$$g(z) := \frac{1}{(z-2)^2}$$

の 0 の周りの Laurent 展開は?  $g(z) = -f'(z)$  (例 22.5  $f(z) = \frac{1}{z-2}$ ) であるから、 $f$  の Laurent 展開を項別に微分して  $-1$  をかければよい。すなわち

$$g(z) = -f'(z) = -\left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)z^n}{2^{n+2}}$$

$(z \in A(0; 0, 2)).$

(要チェック) 同様にして、任意の  $m \in \mathbb{N}$  に対して、 $\frac{1}{(z-2)^m}$  の Laurent 展開も求められる。 □

# 10.1 Laurent 展開

## 定理 22.3 の証明

(係数の一意性) 最初に係数についての等式 (2) を証明する。  $m$  を任意の整数とする。(1)

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$  の両辺を  $(z-c)^{m+1}$  で割って

$$(7) \quad \frac{f(z)}{(z-c)^{m+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^{n-m-1} \quad (z \in A(c; R_1, R_2)).$$

$R_1 < r < R_2$  を満たす任意の  $r$  に対して、円周  $|z-c|=r$  上で Laurent 級数が一様収束するので、有界な  $\frac{1}{(z-c)^{m+1}}$  をかけた (7) も一様収束する。ゆえに、項別積分が可能であり、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{(z-c)^{m+1}} dz &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} a_n(z-c)^{n-m-1} dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta_{nm} = a_m. \end{aligned}$$

これから、(2) が成立することと、その積分の値が  $r$  に依らないこと、さらに (1) を満たす  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  が一意的である (存在すればただ一つしかない) ことが分かる。

## 10.1 Laurent 展開

(存在) 以下、(1) を満たす  $\{a_n\}$  が存在することを示す。  $r_1, r_2$  を  $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$  を満たす任意の数とする。  $D := A(c; r_1, r_2)$  とおくと、  $f$  が  $\overline{D}$  を含む開集合  $A(c; R_1, R_2)$  で正則であるからことから、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (z \in A(c; r_1, r_2))$$

が導かれる (Cauchy の積分公式)。

ゆえに

$$I := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = r_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad J := -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

とおくと

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = I + J.$$

$I$  は円盤における正則関数の Taylor 展開と同じで、

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n, \quad a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = r_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

この級数は  $|z - c| < r_2$  で収束する。

## 10.1 Laurent 展開

$J$  については、 $|\zeta - c| = r_1$  のとき  $\left| \frac{\zeta - c}{z - c} \right| = \frac{r_1}{|z - c|} < 1$  であるから (等比級数の和の公式より)

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - c) - (z - c)} = \frac{-1}{z - c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - c}{z - c}} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - c)^{n-1}}{(z - c)^n}$$

が成り立ち

$$(8) \quad J = + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = r_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - c)^{n-1}}{(z - c)^n} f(\zeta) d\zeta.$$

Weierstrass の最大値定理によって、 $M := \max_{|\zeta - c| = r_1} |f(\zeta)|$  が存在し、 $|\zeta - c| = r_1$  ならば

$$\left| \frac{(\zeta - c)^{n-1}}{(z - c)^n} f(\zeta) \right| \leq \frac{M}{r_1} \left( \frac{r_1}{|z - c|} \right)^n, \quad \left| \frac{r_1}{|z - c|} \right| < 1$$

が成り立つので、Weierstrass M-test が適用できて、(8) の右辺に現れる級数は、円周  $|\zeta - c| = r_1$  上で一様収束する。

## 10.1 Laurent 展開

ゆえに項別積分が可能で

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{|\zeta-c|=r_1} \frac{(\zeta-c)^{n-1}}{(z-c)^n} f(\zeta) d\zeta \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-c|=r_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{-n+1}} d\zeta \frac{1}{(z-c)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}. \end{aligned}$$

この級数は  $|z-c| > r_1$  で収束する。

まとめると

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (r_1 < |z-c| < r_2).$$

$r_1, r_2$  ( $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ ) が任意であることから、この級数は  $A(c; R_1, R_2)$  で収束する。 □

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2020/complex2020.pdf> (2014～).