複素関数・同演習 第22回

〜一致の定理 (2), Laurent 展開〜

桂田 祐史（かつらだ まさし）

2020年12月9日

目次

本日の内容・連絡事項

- 前回紹介した一致の定理 (定理 21.9) の証明を解説する。
- 円環領域で正則な関数は Laurent 展開できる、という定理を紹介する。Laurent 展開が何の役に立つかの説明 (孤立特異点における留数の応用は、複素関数が一番役に立つところ、と考えている人が結構いるだろう) は次回以降になる。簡単な例をゆっくり解説する。

  講義ノート [1] の §10.1 の内容である。
- 宿題 11 を出します (締め切りは 12 月 8 日 13:30)。

9.2 一致の定理 (復習)

次の定理は前回既に紹介してある。

定理 21.9 (一致の定理 (the identity theorem), 一意接続の定理)

D は $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、$f\colon D \to \mathbb{C}$ と $g\colon D \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in D$, 複素数列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は二条件

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = c$
2. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $z_n \in D$ かつ $z_n \neq c$ かつ $f(z_n) = g(z_n)$

を満たすとするとき、D 全体で $f = g$.

9.2 一致の定理 (復習)

次の定理は前回既に紹介してある。

定理 21.9 (一致の定理 (the identity theorem), 一意接続の定理)

D は $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、$f\colon D\to\mathbb{C}$ と $g\colon D\to\mathbb{C}$ は正則、$c\in D$, 複素数列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は二条件

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = c$

(ii) $\forall n\in\mathbb{N}$ に対して $z_n\in D$ かつ $z_n\neq c$ かつ $f(z_n)=g(z_n)$

を満たすとするとき、D 全体で $f=g$.

以下で紹介する証明は 2 つのステップからなる。

後半はトポロジーの予備知識があれば、見通しが良く、長くは感じないだろうが、初めてだと理解するのは大変かもしれない (こういうのは複数回ふれる必要があると思う)。

一応全部書いておくが、前半 (Step 1) を理解することを目標としよう。

定理 21.9 の証明

$f - g$ を新たに f と置いて考えることで、$g = 0$ の場合に証明すれば良いことが分かる。

定理 21.9 の証明

$f-g$ を新たに f と置いて考えることで、$g=0$ の場合に証明すれば良いことが分かる。

Step 1. D は開集合であるから、$(\exists\varepsilon>0)\ \overline{D(c;\varepsilon)}\subset D$. 正則関数の冪級数展開可能性より、$\{a_n\}_{n\geq 0}$ が存在して、

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n \quad (z\in D(c;\varepsilon)).$$

まずこの円盤 $D(c;\varepsilon)$ で $f=0$ であることを示す。

定理 21.9 の証明

$f-g$ を新たに f と置いて考えることで、$g=0$ の場合に証明すれば良いことが分かる。

Step 1. D は開集合であるから、$(\exists\varepsilon>0)\ \overline{D(c;\varepsilon)}\subset D$. 正則関数の冪級数展開可能性より、$\{a_n\}_{n\geq 0}$ が存在して、

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n \quad (z\in D(c;\varepsilon)).$$

まずこの円盤 $D(c;\varepsilon)$ で $f=0$ であることを示す。

実は任意の n に対して $a_n=0$ である。実際、もしそうでないと仮定すると、
$\exists n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ s.t. $a_n\neq 0$. そのような n のうち、最小のものを k とおくと、

$$a_0=a_1=\cdots=a_{k-1}=0,\quad a_k\neq 0.$$

すると

$$f(z)=\sum_{n=k}^{\infty}a_n(z-c)^n=(z-c)^k\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}(z-c)^n \quad (z\in D(c;\varepsilon)).$$

$g(z):=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}(z-c)^n$ は $z\in D(c;\varepsilon)$ で収束し、$g(z_n)=\dfrac{f(z_n)}{(z_n-c)^k}=\dfrac{0}{(z_n-c)^k}=0.$

定理 21.9 の証明 (続き)

ゆえに

$$a_k = g(c) = \lim_{n\to\infty} g(z_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

これは矛盾である。ゆえに任意の n に対して $a_n = 0$. ゆえに $f(z) = 0$ $(z \in D(c;\varepsilon))$.

定理 21.9 の証明 (続き)

ゆえに

$$a_k = g(c) = \lim_{n\to\infty} g(z_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

これは矛盾である。ゆえに任意の n に対して $a_n = 0$. ゆえに $f(z) = 0$ $(z \in D(c;\varepsilon))$.

Step 2.

$$D_0 := \left\{ z \in D \;\middle|\; (\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) \neq 0 \right\}, \quad D_1 := \left\{ z \in D \;\middle|\; (\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) = 0 \right\}$$

とおくと (簡単な論理の法則を用いて)

$$D_0 \cup D_1 = D, \quad D_0 \cap D_1 = \emptyset.$$

定理 21.9 の証明 (続き)

ゆえに

$$a_k = g(c) = \lim_{n\to\infty} g(z_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

これは矛盾である。ゆえに任意の n に対して $a_n = 0$. ゆえに $f(z) = 0$ $(z \in D(c;\varepsilon))$.

Step 2.

$$D_0 := \left\{ z \in D \,\middle|\, (\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) \neq 0 \right\}, \quad D_1 := \left\{ z \in D \,\middle|\, (\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) = 0 \right\}$$

とおくと (簡単な論理の法則を用いて)

$$D_0 \cup D_1 = D, \quad D_0 \cap D_1 = \emptyset.$$

実は D_0 と D_1 は開集合である (理由は次のスライド)。

定理 21.9 の証明 (続き)

ゆえに

$$a_k = g(c) = \lim_{n\to\infty} g(z_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

これは矛盾である。ゆえに任意の n に対して $a_n = 0$. ゆえに $f(z) = 0$ $(z \in D(c;\varepsilon))$.

Step 2.

$$D_0 := \left\{ z \in D \,\middle|\, (\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) \neq 0 \right\}, \quad D_1 := \left\{ z \in D \,\middle|\, (\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) = 0 \right\}$$

とおくと (簡単な論理の法則を用いて)

$$D_0 \cup D_1 = D, \quad D_0 \cap D_1 = \emptyset.$$

実は D_0 と D_1 は開集合である (理由は次のスライド)。

また $c \in D_1$ であるから $D_1 \neq \emptyset$.

定理 21.9 の証明 (続き)

ゆえに
$$a_k = g(c) = \lim_{n\to\infty} g(z_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$
これは矛盾である。ゆえに任意の n に対して $a_n = 0$. ゆえに $f(z) = 0$ $(z \in D(c;\varepsilon))$.

Step 2.

$$D_0 := \left\{ z \in D \;\middle|\; (\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) \neq 0 \right\}, \quad D_1 := \left\{ z \in D \;\middle|\; (\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) = 0 \right\}$$

とおくと (簡単な論理の法則を用いて)

$$D_0 \cup D_1 = D, \quad D_0 \cap D_1 = \emptyset.$$

実は D_0 と D_1 は開集合である (理由は次のスライド)。

また $c \in D_1$ であるから $D_1 \neq \emptyset$.

この後に紹介する命題 22.1(これはトポロジーでは常識) より、$D_0 = \emptyset$, $D_1 = D$. ゆえに $f = 0$ in D.

定理 21.9 の証明 (続き)

D_0 は開集合であること $f^{(n)}$ が連続関数であることから、D_0 は開集合であることが導かれる。実際、$z_0 \in D_0$ とするとき、 $(\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})\ f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

- D が開集合であることから、$(\exists \delta_1 > 0)\ D(z_0; \delta_1) \subset D$.
- $\varepsilon := \left|f^{(n)}(z_0)\right|$ とおくと、$\varepsilon > 0$ であり、$f^{(n)}$ は連続であるから、$(\exists \delta_2 > 0)$ $(\forall z \in D\colon\ |z - z_0| < \delta_2)\ \left|f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_0)\right| < \varepsilon$. このとき

$$\left|f^{(n)}(z)\right| = \left|f^{(n)}(z_0) - f^{(n)}(z_0) + f^{(n)}(z)\right| \geq \left|f^{(n)}(z_0)\right| - \left|f^{(n)}(z_0) - f^{(n)}(z)\right| > \varepsilon - \varepsilon = 0.$$

ゆえに $f^{(n)}(z) \neq 0$. 従って $z \in D_0$.

$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと、$\delta > 0$ かつ $D(z; \delta) \subset D_0$. ゆえに D_0 は開集合である。

定理 21.9 の証明 (続き)

D_0 は開集合であること　$f^{(n)}$ が連続関数であることから、D_0 は開集合であることが導かれる。実際、$z_0 \in D_0$ とするとき、 $(\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})\ f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

- D が開集合であることから、$(\exists \delta_1 > 0)\ D(z_0; \delta_1) \subset D$.
- $\varepsilon := \left|f^{(n)}(z_0)\right|$ とおくと、$\varepsilon > 0$ であり、$f^{(n)}$ は連続であるから、$(\exists \delta_2 > 0)$ $(\forall z \in D\colon\ |z - z_0| < \delta_2)\ \left|f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_0)\right| < \varepsilon$. このとき

$$\left|f^{(n)}(z)\right| = \left|f^{(n)}(z_0) - f^{(n)}(z_0) + f^{(n)}(z)\right| \geq \left|f^{(n)}(z_0)\right| - \left|f^{(n)}(z_0) - f^{(n)}(z)\right| > \varepsilon - \varepsilon = 0.$$

ゆえに $f^{(n)}(z) \neq 0$. 従って $z \in D_0$.

$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと、$\delta > 0$ かつ $D(z;\delta) \subset D_0$. ゆえに D_0 は開集合である。

D_1 は開集合であること　実際、$z_0 \in D_1$ ならば、$(\exists R > 0)$ $(\exists \{a_n\}_{n\geq 0}$: 複素数列$)$ $(\forall z \in D(z_0; R))\ f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. ところが $z_0 \in D_1$ より、任意の n に対して $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = 0$ なので、$f(z) = 0$. ゆえに $D(z_0; R) \subset D_1$. ゆえに D_1 は開集合である。 □

9.2 一致の定理

命題 22.1 (弧連結な開集合は連結)

D は $\mathbb{C}$ の弧連結な開集合、D_0 と D_1 は $\mathbb{C}^n$ の開集合で $D_0 \cup D_1 = D$, $D_0 \cap D_1 = \emptyset$ とすると、D_0 と D_1 のいずれかが空集合である。

命題 22.1 (弧連結な開集合は連結)

D は $\mathbb{C}$ の弧連結な開集合、D_0 と D_1 は $\mathbb{C}^n$ の開集合で $D_0 \cup D_1 = D$, $D_0 \cap D_1 = \emptyset$ とすると、D_0 と D_1 のいずれかが空集合である。

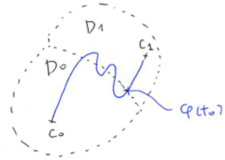
命題 22.1 の証明　背理法を用いる。

9.2 一致の定理

命題 22.1 (弧連結な開集合は連結)

D は $\mathbb{C}$ の弧連結な開集合、D_0 と D_1 は $\mathbb{C}^n$ の開集合で $D_0 \cup D_1 = D$, $D_0 \cap D_1 = \emptyset$ とすると、D_0 と D_1 のいずれかが空集合である。

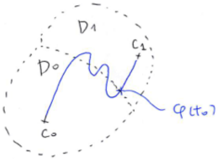
命題 22.1 の証明　背理法を用いる。$D_0 \neq \emptyset$ かつ $D_1 \neq \emptyset$ と仮定して矛盾を導く。
$c_0 \in D_0$, $c_1 \in D_1$ を取る。D は弧連結であるから、$\varphi(0) = c_0$, $\varphi(1) = c_1$ を満たす連続な $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ が存在する。



命題 22.1 (弧連結な開集合は連結)

D は $\mathbb{C}$ の弧連結な開集合、D_0 と D_1 は $\mathbb{C}^n$ の開集合で $D_0 \cup D_1 = D$, $D_0 \cap D_1 = \emptyset$ とすると、D_0 と D_1 のいずれかが空集合である。

命題 22.1 の証明　背理法を用いる。$D_0 \neq \emptyset$ かつ $D_1 \neq \emptyset$ と仮定して矛盾を導く。
$c_0 \in D_0$, $c_1 \in D_1$ を取る。D は弧連結であるから、$\varphi(0) = c_0$, $\varphi(1) = c_1$ を満たす連続な $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ が存在する。



$$I_0 := \{t \in [0,1] \mid \varphi(t) \in D_0\}, \quad I_1 := \{t \in [0,1] \mid \varphi(t) \in D_1\}$$

とおくと

$$I_0 \cup I_1 = [0,1], \quad I_0 \cap I_1 = \emptyset, \quad 0 \in I_0, \quad 1 \in I_1.$$

D_0 と D_1 は開集合、φ は連続であるから、$(\exists \delta_0, \delta_1 > 0)$ $[0, \delta_0] \subset I_0 \wedge [1-\delta_1, 1] \subset I_1$.
$t_0 := \sup I_0$ とおくと、$\delta_0 \leq t_0 \leq 1 - \delta_1$. ゆえに $0 < t_0 < 1$.

命題 22.1 の証明 (続き)　t_0 が I_0, I_1 のどちらに属するか考えて矛盾を導く。

$t_0 \in I_0$ の場合、D_0 が開集合で φ が連続であることから、$(\exists \varepsilon_1 \in (0, d))$ $(t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1) \subset I_0$. すると $t_0 = \sup I_0 \geq t_0 + \varepsilon_1$ となり、矛盾が生じる。

$t_0 \in I_1$ の場合、D_0 が開集合で φ が連続であることから、$(\exists \varepsilon_2 \in (0, d))$ $(t_0 - \varepsilon_2, t_0 + \varepsilon_2) \subset I_1$. I_1 と共通部分のない I_0 の上限が I_1 の内部にあるのは矛盾である。 $\square$

円盤で正則な関数は冪級数展開できることが分かった。円盤を円環に置き換えてみる。

定義 22.2 (円環領域)

$c \in \mathbb{C}$, $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$ に対して

$$A(c; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z - c| < R_2\}$$

を c を中心とする**円環領域** (annulus, annular domain) と呼ぶ。

$$\overline{A}(c; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 \le |z - c| \le R_2\} \quad (\text{ただし } R_2 < +\infty).$$

(注意: $R_2 = +\infty$ のときは、$z \in \mathbb{C}$ であるから $|z - c| < +\infty$ ということになる。)

円盤で正則な関数は冪級数展開できることが分かった。円盤を円環に置き換えてみる。

定義 22.2 (円環領域)

$c \in \mathbb{C}$, $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$ に対して

$$A(c; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z-c| < R_2\}$$

を c を中心とする**円環領域** (annulus, annular domain) と呼ぶ。

$$\overline{A}(c; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 \le |z-c| \le R_2\} \quad (\text{ただし } R_2 < +\infty).$$

(注意: $R_2 = +\infty$ のときは、$z \in \mathbb{C}$ であるから $|z-c| < +\infty$ ということになる。)

「円環」という言葉にふさわしいのは、$0 < R_1 < R_2 < +\infty$ の場合だけだろう。しかし、Laurent 級数の収束・発散を扱うときは、(収束円のときと同様に) $R_1 = 0$ や $R_2 = +\infty$ の場合も考えるのが有効である。

実は $R_1 = 0$ の場合が頻出する。このとき $A(c; R_1, R_2)$ は円盤 $D(c; R_2)$ から c を除いたものである。すなわち

$$A(c; 0, R_2) = D(c; R_2) \setminus \{c\}.$$

定理 22.3 (円環領域で正則な関数は Laurent 展開出来る)

$c \in \mathbb{C}$, $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$, $f\colon A(c;R_1,R_2) \to \mathbb{C}$ は正則とするとき、ある複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ が一意的に存在して

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (z \in A(c;R_1,R_2)).$$

右辺の級数は、$R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ を満たす任意の r_1, r_2 に対して、$\overline{A}(c;r_1,r_2) = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 \le |z-c| \le r_2\}$ で一様絶対収束する。

(1) が成り立つとき、$R_1 < r < R_2$ を満たす任意の r に対して

$$(2) \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}\,dz \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

定義 22.4 (Laurent 展開)

$c \in \mathbb{C}$, $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$, $f\colon A(c;R_1,R_2) \to \mathbb{C}$ は正則とするとき

$$(3) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \quad (z \in A(c;R_1,R_2))$$

を満たす $\{a_n\}$ が一意的に存在する。(3) を、*f の $A(c;R_1,R_2)$ における* **Laurent 級数展開**と呼ぶ。

特に $R_1 = 0$ のとき、*f の c のまわりの (c における)* **Laurent 級数展開**と呼ぶ。また、このとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ を f の Laurent 級数展開の**主部** (**主要部**, the principal part) と呼ぶ。また、a_{-1} を f の c における**留数** (residue) と呼び、$\mathrm{Res}(f;c)$ あるいは $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=c} f(z)\,dz$ で表す。

注意

1. Laurent 展開は Taylor 展開の一般化である。Taylor 展開は Laurent 展開でもある。
f が $D(c;R)$ で正則と仮定すると、Taylor 展開できる:

$$(\exists\{a_n\}_{n\geq 0})\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n\quad(|z-c|<R).$$

f は $A(c;0,R)$ で正則でもあるので、上の定理から Laurent 級数展開できる:

$$(\exists\{a'_n\}_{n\in\mathbb{Z}})\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a'_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a'_{-n}}{(z-c)^n}\quad(0<|z-c|<R).$$

Laurent 展開の一意性から、$n\geq 0$ のとき $a'_n=a_n$, $n<0$ のとき $a'_n=0$.
Taylor 展開では

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}dz=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

が成り立つが、Laurent 級数展開では $f^{(n)}(c)$ が存在しない場合があることに注意。

例 22.5 (簡単な関数でゆっくりと)

(4)
$$f(z) = \frac{1}{z-2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}).$$

まず $c = 2$ の周りの Laurent 展開を求めよう。実は (4) 自身が f の $A(2; 0, +\infty)$ での Laurent 展開である。

(実際、$a_{-1} = 1$, $a_n = 0$ $(n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$ とおくと、$\dfrac{1}{z-2} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$.)

$c = 0$ の周りの Laurent 展開は？ f は $D(0; 2)$ で正則であるから、そこで冪級数展開出来る。実際

$$f(z) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (\text{収束} \Leftrightarrow |z| < 2)).$$

もちろん

(5)
$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (0 < |z| < 2, \text{ i.e. } z \in A(0; 0, 2)).$$

例 22.5 (つづき)

一方、f は $2<|z|<+\infty$ つまり $A(0;2,+\infty)$ でも f は正則であるから、そこで Laurent 展開出来る。実際

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} \tag{6}$$

$$(2<|z|<+\infty \text{ i.e. } z\in A(0;2,+\infty)). \quad \square$$

注意 (続き)

2. 係数の公式 (2)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{(z-c)^{n+1}}\,dz$$

は、$D(c;R)$ で正則な関数の Taylor 展開の係数の式と同じ形である。「覚えられない」とギブ・アップしないように。
この式を使って (線積分を計算することによって) a_n を求めることは稀である。(むしろ a_n を計算して積分を求める、と逆方向に利用することが多い。)

3. (1) を $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ と書く (1 つの $\sum$ で済ませる) こともあるが、

$$\lim_{N_1,N_2\to+\infty}\sum_{n=-N_1}^{N_2} a_n(z-c)^n$$

という意味である。Fourier 級数の場合の

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

とは異なる。

4. 負の番号からなる項 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}$ について、次のどれか 1 つ (だけ) が成立する。
   1. 任意の $z\in\mathbb{C}\setminus\{c\}$ に対して収束する。
   2. ある $R\in(0,+\infty)$ が存在して、$|z-c|>R$ ならば収束、$|z-c|<R$ ならば発散する。
   3. 任意の $z\in\mathbb{C}\setminus\{c\}$ に対して発散する。

   (i) のとき $R=0$, (iii) のとき $R=+\infty$ とすると、いずれの時も

   $$|z-c|>R \text{ ならば収束、} |z-c|<R \text{ ならば発散する}$$

   とまとめられる。

   おおざっぱに言うと、冪級数のときとは、不等号の向きが反対、ということ。

4. (つづき) さらに

$$(\forall r > R) \quad \overline{A}(c; r, +\infty) = \{z \in \mathbb{R} \mid |z - c| \geq r\} \text{ で一様絶対収束}$$

が成り立つ。実際 $\zeta := \dfrac{1}{z-c}$ とおくと

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-c)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^n.$$

右辺は ζ についての冪級数であるから、$0 \leq \rho \leq +\infty$ を満たすある ρ が存在して

> $|\zeta| < \rho$ ならば収束、$|\zeta| > \rho$ ならば発散、$0 < r < \rho$ を満たす任意の r に対して $\overline{D}(0; r) = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| \leq r\}$ で一様に絶対収束する。

ゆえに

> $|z - c| > \dfrac{1}{\rho}$ ならば収束、$|z - c| < \dfrac{1}{\rho}$ ならば発散、$\dfrac{1}{\rho} < r < +\infty$ を満たす任意の r に対して $|z - c| \geq r$ の範囲で一様に絶対収束する。

ゆえに $R := \dfrac{1}{\rho}$ とおけば良い。

実は Laurent 展開は項別微分もできる。

例 22.6

$$g(z) := \frac{1}{(z-2)^2}$$

の 0 の周りの Laurent 展開は？$g(z) = -f'(z)$ (例 22.5 $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$) であるから、f の Laurent 展開を項別に微分して -1 をかければよい。すなわち

$$g(z) = -f'(z) = -\left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)z^n}{2^{n+2}}$$
$$(z \in A(0;0,2)).$$

(要チェック) 同様にして、任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して、$\dfrac{1}{(z-2)^m}$ の Laurent 展開も求められる。□

定理 22.3 の証明

(係数の一意性) 最初に係数についての等式 (2) を証明する。m を任意の整数とする。(1) $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-c)^n$ の両辺を $(z-c)^{m+1}$ で割って

$$(7)\qquad \frac{f(z)}{(z-c)^{m+1}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-c)^{n-m-1}\quad (z\in A(c;R_1,R_2)).$$

$R_1<r<R_2$ を満たす任意の r に対して、円周 $|z-c|=r$ 上で Laurent 級数が一様収束するので、有界な $\dfrac{1}{(z-c)^{m+1}}$ をかけた (7) も一様収束する。ゆえに、項別積分が可能であり、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}\frac{f(z)}{(z-c)^{m+1}}\,dz&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=r}a_n(z-c)^{n-m-1}\,dz\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\delta_{nm}=a_m.\end{aligned}$$

これから、(2) が成立することと、その積分の値が r に依らないこと、さらに (1) を満たす $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が一意的である (存在すればただ一つしかない) ことが分かる。

10.1 Laurent 展開

(存在) 以下、(1) を満たす $\{a_n\}$ が存在することを示す。r_1, r_2 を $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ を満たす任意の数とする。$D := A(c; r_1, r_2)$ とおくと、f が $\overline{D}$ を含む開集合 $A(c; R_1, R_2)$ で正則であるからことから、

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad (z \in A(c; r_1, r_2))$$

が導かれる (Cauchy の積分公式)。
ゆえに

$$I := \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = r_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad J := -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = r_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

とおくと

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = I + J.$$

I は円盤における正則関数の Taylor 展開と同じで、

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n, \quad a_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = r_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta.$$

この級数は $|z - c| < r_2$ で収束する。

J については、$|\zeta - c| = r_1$ のとき $\left|\dfrac{\zeta - c}{z - c}\right| = \dfrac{r_1}{|z-c|} < 1$ であるから (等比級数の和の公式より)

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - c) - (z - c)} = \frac{-1}{z - c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - c}{z - c}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - c)^{n-1}}{(z - c)^n}$$

が成り立ち

$$J = +\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - c| = r_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - c)^{n-1}}{(z - c)^n} f(\zeta) d\zeta. \tag{8}$$

Weierstrass の最大値定理によって、$M := \max\limits_{|\zeta - c| = r_1} |f(\zeta)|$ が存在し、$|\zeta - c| = r_1$ ならば

$$\left|\frac{(\zeta - c)^{n-1}}{(z - c)^n} f(\zeta)\right| \le \frac{M}{r_1}\left(\frac{r_1}{|z - c|}\right)^n, \quad \left|\frac{r_1}{|z - c|}\right| < 1$$

が成り立つので、Weierstrass M-test が適用できて、(8) の右辺に現れる級数は、円周 $|\zeta - c| = r_1$ 上で一様収束する。

ゆえに項別積分が可能で

$$J = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{|\zeta-c|=r_1}\frac{(\zeta-c)^{n-1}}{(z-c)^n}f(\zeta)\,d\zeta$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=r_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{-n+1}}\,d\zeta\frac{1}{(z-c)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}.$$

この級数は $|z-c|>r_1$ で収束する。

まとめると

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n}\quad (r_1<|z-c|<r_2).$$

r_1, r_2 $(R_1<r_1<r_2<R_2)$ が任意であることから、この級数は $A(c;R_1,R_2)$ で収束する。 $\square$

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2020/complex2020.pdf (2014〜).