複素関数・同演習 第21回

～Green の定理, 正則関数の性質 (零点の位数, 一致の定理) ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2020年12月8日

目次

1. 本日の内容・連絡事項
2. Green の定理と Cauchy の積分定理・積分公式
   - Green の定理
   - Green の定理が成り立つ領域での Cauchy の積分定理
   - Green の定理が成り立つ領域での Cauchy の積分公式
3. 正則関数の性質 (前半)
   - 正則関数の零点とその位数
   - 一致の定理
4. 参考文献

本日の内容・連絡事項

本日の内容・連絡事項

- 前回言い忘れた: 正則関数は無限回微分可能であることが分かったため、逆関数定理や、「正則関数の実部・虚部は調和関数」など、証明がおあずけになっていた定理がすっきり片付いた。

本日の内容・連絡事項

- 前回言い忘れた: 正則関数は無限回微分可能であることが分かったため、逆関数定理や、「正則関数の実部・虚部は調和関数」など、証明がおあずけになっていた定理がすっきり片付いた。
- 前回のスライド資料の最後に出した (動画では説明を略した) Green の定理と、それにに基づく Cauchy の積分公式 (とても便利) について簡単に説明する。

本日の内容・連絡事項

- 前回言い忘れた: 正則関数は無限回微分可能であることが分かったため、逆関数定理や、「正則関数の実部・虚部は調和関数」など、証明がおあずけになっていた定理がすっきり片付いた。
- 前回のスライド資料の最後に出した (動画では説明を略した) Green の定理と、それにに基づく Cauchy の積分公式 (とても便利) について簡単に説明する。
- 今後、どういうことを説明するか。大きく分けて 2 つ。
  - (a) 正則関数の性質 (積分公式、解析性が得られたのでそれらを利用して)
  - (b) Laurent 展開、留数、留数の応用 (定積分計算)

  (b) には計算練習の必要な項目が多いので、(a) の中で (b) で必要になることの説明を済ませた後は、(b) に移り、少しでも早く計算練習ができるようにする。そして重要ではあるけれど、問題演習の必要が少ない (a) の残りの部分は最後に説明する。

本日の内容・連絡事項

- 前回言い忘れた: 正則関数は無限回微分可能であることが分かったため、逆関数定理や、「正則関数の実部・虚部は調和関数」など、証明がおあずけになっていた定理がすっきり片付いた。
- 前回のスライド資料の最後に出した (動画では説明を略した) Green の定理と、それにに基づく Cauchy の積分公式 (とても便利) について簡単に説明する。
- 今後、どういうことを説明するか。大きく分けて 2 つ。
  1. (a) 正則関数の性質 (積分公式、解析性が得られたのでそれらを利用して)
  2. (b) Laurent 展開、留数、留数の応用 (定積分計算)

  (b) には計算練習の必要な項目が多いので、(a) の中で (b) で必要になることの説明を済ませた後は、(b) に移り、少しでも早く計算練習ができるようにする。そして重要ではあるけれど、問題演習の必要が少ない (a) の残りの部分は最後に説明する。
- 宿題 10 の解説をします (動画公開は 12 月 8 日 13:30 以降)。

本日の内容・連絡事項

- 前回言い忘れた: 正則関数は無限回微分可能であることが分かったため、逆関数定理や、「正則関数の実部・虚部は調和関数」など、証明がおあずけになっていた定理がすっきり片付いた。
- 前回のスライド資料の最後に出した (動画では説明を略した) Green の定理と、それにに基づく Cauchy の積分公式 (とても便利) について簡単に説明する。
- 今後、どういうことを説明するか。大きく分けて 2 つ。
  - (a) 正則関数の性質 (積分公式、解析性が得られたのでそれらを利用して)
  - (b) Laurent 展開、留数、留数の応用 (定積分計算)

  (b) には計算練習の必要な項目が多いので、(a) の中で (b) で必要になることの説明を済ませた後は、(b) に移り、少しでも早く計算練習ができるようにする。そして重要ではあるけれど、問題演習の必要が少ない (a) の残りの部分は最後に説明する。
- 宿題 10 の解説をします (動画公開は 12 月 8 日 13:30 以降)。
- 宿題 11 を出します (締め切りは 12 月 15 日 13:30)。
  水曜 2 限の複素関数演習で公開しますが、課題文自体の置き場所は
  `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/toi11.pdf` です (直接アクセスできます)。

次の定理は “常識” とされるが、取り扱いは少しやっかいである。

定理 21.1 ((かなり一般的な) Green の公式)

$\mathbb{R}^2$ の領域 D の境界は、有限個の区分的 C^1 級正則単純閉曲線 $C_1, \ldots, C_m$ の像の合併になっていて、各 C_j $(j = 1, \ldots, m)$ の進行方向の「左手」に D を見るようになっているとする。このとき、$\overline{D}$ を含むある開集合で C^1 級の関数 P, Q に対して、

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy.$$

証明　かなり手間がかかる。載っているのは杉浦 [1], 笠原 [2] くらい。 □

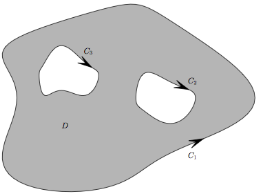


図 1: 領域 D の境界 ∂D は $C_1 + C_2 + C_3$ に等しい

8.1 Green の定理

私のお勧めはこちら。

定理 21.2 (縦線領域における Green の公式)

$\mathbb{R}^2$ の領域 D は、(x 軸方向または y 軸方向に) 縦線領域であり、その境界 ∂D は、区分的 C^1 級曲線 C の像になっていて、C の進行方向の左手に D が見えるようになっているとする。このとき、$\overline{D}$ を含むある開集合で C^1 級の関数 P, Q に対して、

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy. \tag{1}$$

8.1 Green の定理

私のお勧めはこちら。

定理 21.2 (縦線領域における Green の公式)

$\mathbb{R}^2$ の領域 D は、(x 軸方向または y 軸方向に) 縦線領域であり、その境界 ∂D は、区分的 C^1 級曲線 C の像になっていて、C の進行方向の左手に D が見えるようになっているとする。このとき、$\overline{D}$ を含むある開集合で C^1 級の関数 P, Q に対して、

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy. \tag{1}$$

証明　比較的簡単で、多くの微積分の教科書に載っている (「縦線領域」の定義などもそういうのを見て下さい)。例えば桂田 [3] を見よ。 □

8.1 Green の定理

D 自身が縦線領域でなくても、縦線領域であるような部分領域 $D_1, \cdots, D_m$ が存在して、任意の P, Q に対して

$$\int_{\partial D} P dx + Q\, dy = \sum_{j=1}^{m} \int_{\partial D_j} P\, dx + Q\, dy$$

が成り立つような場合は、(1) が成立する。以下このことは使うことにする。

8.2 Green の定理が成り立つ領域での Cauchy の積分定理

定理 21.3 (Green の公式が成り立つ領域での Cauchy の積分定理)

D は $\mathbb{C}$ の領域、D を $\mathbb{R}^2$ の領域とみなしたとき、Green の定理の仮定を満たすとする。このとき $\overline{D}$ を含む開集合で正則な f に対して

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0.$$

定理 21.3 (Green の公式が成り立つ領域での Cauchy の積分定理)

D は $\mathbb{C}$ の領域、D を $\mathbb{R}^2$ の領域とみなしたとき、Green の定理の仮定を満たすとする。このとき $\overline{D}$ を含む開集合で正則な f に対して

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0.$$

証明　f の実部・虚部をそれぞれ u, v とすると、u と v は Cauchy-Riemann の方程式を満たし、 C^∞ 級である (正則関数は何回でも微分可能であることが証明されている)。Green の定理を使った後で、Cauchy-Riemann 方程式を代入することで

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_C (u+iv)\,(dx+i\,dy)\\ &= \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (v\,dx + u\,dy)\\ &= \iint_D (-v_x - u_y)\,dx\,dy + i\iint_D (u_x - v_y)\,dx\,dy\\ &= \iint_D 0\,dx\,dy + i\iint_D 0\,dx\,dy = 0. \quad \square\end{aligned}$$

8.3 Green の定理が成り立つ領域での Cauchy の積分公式

円盤における Cauchy の積分公式は証明してあるが、次の定理はいっそう便利である。

定理 21.4 (Green の公式が成り立つ領域での Cauchy の積分公式)

D は $\mathbb{C}$ の領域で、$\mathbb{R}^2$ の領域と同一視したとき、Green の公式が成り立つ領域であるとする。このとき、$\overline{D}$ を含むある開集合で正則な関数 f に対して、

$$(\forall a \in D) \quad f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

8.3 Green の定理が成り立つ領域での Cauchy の積分公式

円盤における Cauchy の積分公式は証明してあるが、次の定理はいっそう便利である。

定理 21.4 (Green の公式が成り立つ領域での Cauchy の積分公式)

D は $\mathbb{C}$ の領域で、$\mathbb{R}^2$ の領域と同一視したとき、Green の公式が成り立つ領域であるとする。このとき、$\overline{D}$ を含むある開集合で正則な関数 f に対して、

$$(\forall a \in D) \quad f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

証明　任意の $a \in D$ に対して、十分小さな正の数 r を取ると、$\overline{D}(a;r) \subset D$ が成り立つ。$0 < \varepsilon < r$ を満たす任意の ε について、$D_\varepsilon := D \setminus \overline{D}(a;\varepsilon)$ とおくと、D_ε も Green の公式が成り立つ領域となる。

$\partial D_\varepsilon = \partial D - C$, $C : |z-a| = \varepsilon$ であるから、定理 21.3 によって

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

8.3 Green の定理が成り立つ領域での Cauchy の積分公式

円盤における Cauchy の積分公式は証明してあるが、次の定理はいっそう便利である。

定理 21.4 (Green の公式が成り立つ領域での Cauchy の積分公式)

D は $\mathbb{C}$ の領域で、$\mathbb{R}^2$ の領域と同一視したとき、Green の公式が成り立つ領域であるとする。このとき、$\overline{D}$ を含むある開集合で正則な関数 f に対して、

$$(\forall a \in D) \quad f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

証明　任意の $a \in D$ に対して、十分小さな正の数 r を取ると、$\overline{D}(a;r) \subset D$ が成り立つ。$0 < \varepsilon < r$ を満たす任意の ε について、$D_\varepsilon := D \setminus \overline{D}(a;\varepsilon)$ とおくと、D_ε も Green の公式が成り立つ領域となる。

$\partial D_\varepsilon = \partial D - C$, $C : |z-a| = \varepsilon$ であるから、定理 21.3 によって

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

ゆえに

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

(この後の証明は、すでに紹介済みだが、再録しておく。)
ここで

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}dz-f(a)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta - f(a)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(a+\varepsilon e^{i\theta})-f(a)\right)\,d\theta\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\max_{\theta\in[0,2\pi]}\left|f(a+\varepsilon e^{i\theta})-f(a)\right|\int_0^{2\pi}d\theta \\ &= \max_{\theta\in[0,2\pi]}\left|f(a+\varepsilon e^{i\theta})-f(a)\right|.\end{aligned}$$

f は a で連続であるから、$\varepsilon\to 0$ とすると右辺は 0 に収束する。
ゆえに

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}\,dz=f(a). \quad \square$$

定義 21.5 (正則関数の零点とその位数)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in \Omega$ とする。

1. c が f の**零点** (zero) であるとは、$f(c) = 0$ が成り立つことをいう。
2. c が f の零点で、f が恒等的に 0 でないとき

$$f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0 \wedge f^{(k)}(c) \neq 0$$

を満たす $k \in \mathbb{N}$ を f の零点 c の**位数** (order) と呼ぶ。

(f が恒等的に 0 でないとき、上の条件を満たす k の存在が証明できる。)

定義 21.5 (正則関数の零点とその位数)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則、$c\in\Omega$ とする。

1. c が f の**零点** (zero) であるとは、$f(c)=0$ が成り立つことをいう。
2. c が f の零点で、f が恒等的に 0 でないとき

$$f(c)=f'(c)=\cdots=f^{(k-1)}(c)=0\wedge f^{(k)}(c)\neq 0$$

を満たす $k\in\mathbb{N}$ を f の零点 c の**位数** (order) と呼ぶ。

(f が恒等的に 0 でないとき、上の条件を満たす k の存在が証明できる。)

命題 21.6 (k 位の零点であるための条件)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則、$c\in\Omega$, $k\in\mathbb{N}$ とするとき、次の (i), (ii) は同値である。

(i) c は f の k 位の零点である。

(ii) c を含む開集合 U $(\subset\Omega)$ と、U で正則な関数 g が存在して、$f(z)=(z-c)^k g(z)$ $(z\in U)$ かつ $g(c)\neq 0$.

注意 21.7 (多項式の根について復習)

多項式 $f(z)$, $c \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ について、以下の 3 条件は互いに同値である。

0. c は $f(z)$ の根で、重複度は k (k 重根 — 単根のとき 1 重根というとして).
1. $(\exists g(z) \in \mathbb{C}[z])\ f(z) = (z-c)^k g(z)$, $g(c) \neq 0$.
2. $f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0$ かつ $f^{(k)}(c) \neq 0$.

命題 21.6 はこの一般化と言える。 □

例 21.8

注意 21.7 (多項式の根について復習)

多項式 $f(z)$, $c \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ について、以下の 3 条件は互いに同値である。

0. c は $f(z)$ の根で、重複度は k (k 重根 — 単根のとき 1 重根というとして).
1. $(\exists g(z) \in \mathbb{C}[z])\ f(z) = (z-c)^k g(z)$, $g(c) \neq 0$.
2. $f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0$ かつ $f^{(k)}(c) \neq 0$.

命題 21.6 はこの一般化と言える。 □

例 21.8

1. $f(z) = z^2 + 2z + 1$. $f(z) = (z+1)^2$ であるから、f の零点は -1 のみ。
   $f'(z) = 2z + 2$ なので $f'(-1) = 0$. $f''(z) = 2$ なので $f''(-1) \neq 0$. -1 の位数は 2.

9.1 正則関数の零点とその位数

注意 21.7 (多項式の根について復習)

多項式 $f(z)$, $c \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ について、以下の 3 条件は互いに同値である。

0. c は $f(z)$ の根で、重複度は k (k 重根 — 単根のとき 1 重根というとして).
1. $(\exists g(z) \in \mathbb{C}[z])\ f(z) = (z-c)^k g(z)$, $g(c) \neq 0$.
2. $f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0$ かつ $f^{(k)}(c) \neq 0$.

命題 21.6 はこの一般化と言える。 □

例 21.8

1. $f(z) = z^2 + 2z + 1$. $f(z) = (z+1)^2$ であるから、f の零点は -1 のみ。
   $f'(z) = 2z + 2$ なので $f'(-1) = 0$. $f''(z) = 2$ なので $f''(-1) \neq 0$. -1 の位数は 2.
2. $f(z) = \sin z$ のとき、$f(z) = 0 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\ z = k\pi$. ゆえに f の零点は $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). 位数は全て 1 である。実際、$f(k\pi) = \sin k\pi = 0$,
   $f'(k\pi) = \cos k\pi = (-1)^k \neq 0$ であるから。

注意 21.7 (多項式の根について復習)

多項式 $f(z)$, $c \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ について、以下の 3 条件は互いに同値である。

0. c は $f(z)$ の根で、重複度は k (k 重根 — 単根のとき 1 重根というとして).
1. $(\exists g(z) \in \mathbb{C}[z])\ f(z) = (z-c)^k g(z)$, $g(c) \neq 0$.
2. $f(c) = f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0$ かつ $f^{(k)}(c) \neq 0$.

命題 21.6 はこの一般化と言える。 $\square$

例 21.8

1. $f(z) = z^2 + 2z + 1$. $f(z) = (z+1)^2$ であるから、f の零点は -1 のみ。
   $f'(z) = 2z + 2$ なので $f'(-1) = 0$. $f''(z) = 2$ なので $f''(-1) \neq 0$. -1 の位数は 2.
2. $f(z) = \sin z$ のとき、$f(z) = 0 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\ z = k\pi$. ゆえに f の零点は $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). 位数は全て 1 である。実際、$f(k\pi) = \sin k\pi = 0$,
   $f'(k\pi) = \cos k\pi = (-1)^k \neq 0$ であるから。
3. $f(z) = \cos z - 1$ のとき、$f(z) = 0 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\ z = 2k\pi$. $f(2k\pi) = 1 - 1 = 0$,
   $f'(2k\pi) = -\sin 2k\pi = 0$, $f''(2k\pi) = -\cos(2k\pi) = -1 \neq 0$ であるから $2k\pi$ は 2 位の零点である。

9.1 正則関数の零点とその位数

では、命題 21.6 を証明しよう。多項式でないから割り算に基づく因数定理の証明はできない。それをどう克服するかに注目してほしい ((i)⇒(ii) で冪級数展開を用いる)。

9.1 正則関数の零点とその位数

では、命題 21.6 を証明しよう。多項式でないから割り算に基づく因数定理の証明はできない。それをどう克服するかに注目してほしい ((i)⇒(ii) で冪級数展開を用いる)。

命題 21.6 の証明.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Ω は開集合であるから、ある $R > 0$ が存在して、$\overline{D(c;R)} \subset \Omega$. 正則関数の冪級数展開可能性から

$$(\exists \{a_n\}_{n\ge 0}) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (|z-c| < R).$$

では、命題 21.6 を証明しよう。多項式でないから割り算に基づく因数定理の証明はできない。それをどう克服するかに注目してほしい ((i)⇒(ii) で冪級数展開を用いる)。

命題 21.6 の証明.

(i) ⇒ (ii) Ω は開集合であるから、ある $R > 0$ が存在して、$\overline{D(c;R)} \subset \Omega$. 正則関数の冪級数展開可能性から

$$(\exists \{a_n\}_{n\geq 0}) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (|z-c| < R).$$

このとき $a_n = f^{(n)}(c)/n!$ であるから、$a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$, $a_k \neq 0$.

9.1 正則関数の零点とその位数

では、命題 21.6 を証明しよう。多項式でないから割り算に基づく因数定理の証明はできない。それをどう克服するかに注目してほしい ((i)⇒(ii) で冪級数展開を用いる)。

命題 21.6 の証明.

(i) ⇒ (ii) Ω は開集合であるから、ある $R>0$ が存在して、$\overline{D(c;R)}\subset\Omega$. 正則関数の冪級数展開可能性から

$$(\exists\{a_n\}_{n\geq 0})\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n\quad(|z-c|<R).$$

このとき $a_n=f^{(n)}(c)/n!$ であるから、$a_0=a_1=\cdots=a_{k-1}=0$, $a_k\neq 0$. ゆえに

$$\begin{aligned}f(z)&=\sum_{n=k}^{\infty}a_n(z-c)^n=(z-c)^k\sum_{n=k}^{\infty}a_n(z-c)^{n-k}\\&=(z-c)^k\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}(z-c)^n\quad(|z-c|<R).\end{aligned}$$

$g(z):=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}(z-c)^n$ とおくと、g は $D(c;R)$ で正則であり、$g(c)=a_k\neq 0$. □

命題 21.6 の証明 (つづき).

(ii) ⇒ (i) $h(z) := (z-c)^k$ とおくと、$f(z) = h(z)g(z)$ であるから

$$f^{(m)}(z) = \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} h^{(r)}(z) g^{(m-r)}(z).$$

$r \le k-1$ ならば $h^{(r)}(c) = 0$, $h^{(k)}(c) = k!$ であることに注意しよう。

$0 \le m \le k-1$ ならば $h^{(r)}(c) = 0$ $(0 \le r \le m)$. ゆえに

$$f^{(m)}(c) = \sum_{r=0}^{m} 0 = 0.$$

一方、

$$f^{(k)}(c) = \binom{k}{k} h^{(k)}(c) g^{(0)}(c) = 1 \cdot k! g(c) \neq 0.$$

$\square$

9.2 一致の定理

9.2 一致の定理

定理 21.9 (一致の定理 (the identity theorem), 一意接続の定理)

D は $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、$f\colon D \to \mathbb{C}$ と $g\colon D \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in D$, 複素数列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は二条件

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = c$
2. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $z_n \in D$ かつ $z_n \neq c$ かつ $f(z_n) = g(z_n)$

を満たすとするとき、D 全体で $f = g$.

9.2 一致の定理

定理 21.9 (一致の定理 (the identity theorem), 一意接続の定理)

D は $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、$f\colon D \to \mathbb{C}$ と $g\colon D \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in D$, 複素数列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は二条件

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = c$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $z_n \in D$ かつ $z_n \neq c$ かつ $f(z_n) = g(z_n)$

を満たすとするとき、D 全体で $f = g$.

z_n は関数 $F(z) := f(z) - g(z)$ の零点である。恒等的に 0 でない正則関数が無限個の零点を持つことがある (例: $F(z) = \sin z$, $z = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$) ことに注意しよう。「F の零点が定義域内の点に集積したら $F = 0$」ということである。

定理 21.9 (一致の定理 (the identity theorem), 一意接続の定理)

D は $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、$f\colon D \to \mathbb{C}$ と $g\colon D \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in D$, 複素数列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は二条件

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = c$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $z_n \in D$ かつ $z_n \neq c$ かつ $f(z_n) = g(z_n)$

を満たすとするとき、D 全体で $f = g$.

z_n は関数 $F(z) := f(z) - g(z)$ の零点である。恒等的に 0 でない正則関数が無限個の零点を持つことがある (例: $F(z) = \sin z$, $z = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$) ことに注意しよう。「F の零点が定義域内の点に集積したら $F = 0$」ということである。

一致の定理は上の形で提示されるのが多いが、応用上は次の形で使うのが多い。

- D 内の線分や正則曲線の上で $f = g$ が成り立つならば、$f = g$ が成り立つ。
- D 内の空でない開集合内で $f = g$ が成り立つならば、$f = g$ が成り立つ。

この定理を証明する前に、この定理を使った例をいくつか見てみよう。

9.2 一致の定理

正則関数の零点に関して、次の事実は重要である。

系 21.10

$\mathbb{C}$ の領域 D における正則関数は定数関数に等しくない限り、その零点は互いに孤立している。すなわち c が定数でない正則関数 $f\colon D \to \mathbb{C}$ の零点ならば、

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall z \in D \cap D(c;\varepsilon) \setminus \{c\}) \quad f(z) \neq 0.$$

(十分小さな正数 ε を取ると、c から距離 ε 未満の範囲では、c 以外に f の零点はない。)

9.2 一致の定理

正則関数の零点に関して、次の事実は重要である。

系 21.10

$\mathbb{C}$ の領域 D における正則関数は定数関数に等しくない限り、その零点は互いに孤立している。すなわち c が定数でない正則関数 $f\colon D \to \mathbb{C}$ の零点ならば、

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall z \in D \cap D(c;\varepsilon) \setminus \{c\}) \quad f(z) \neq 0.$$

(十分小さな正数 ε を取ると、c から距離 ε 未満の範囲では、c 以外に f の零点はない。)

証明.

背理法を用いる。結論を否定すると、

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists z \in D \cap D(c;\varepsilon) \setminus \{c\}) \quad f(z) = 0.$$

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、$0 < |z_n - c| < \dfrac{1}{n}$, $f(z_n) = 0$ を満たす $z_n \in D$ が取れる。一致の定理から $f = 0$ in D が導かれる。これは矛盾である。 $\square$

9.2 一致の定理

一致の定理から、$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が正則で

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = g(x)$$

を満たすならば、次式が成り立つ。

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad f(z) = g(z).$$

9.2 一致の定理

一致の定理から、$f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $g\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ が正則で

$$(\forall x\in\mathbb{R})\quad f(x)=g(x)$$

を満たすならば、次式が成り立つ。

$$(\forall z\in\mathbb{C})\quad f(z)=g(z).$$

例 21.11 (実関数を正則に拡張する仕方は 1 つしかない)

この講義では、初等関数を、微積分で得られた Taylor 展開を用いて正則関数に拡張した。例えば

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\quad (x\in\mathbb{R})$$

から

(☆)
$$\cos z:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}\quad (z\in\mathbb{C}).$$

9.2 一致の定理

一致の定理から、$f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $g\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ が正則で

$$(\forall x\in\mathbb{R})\quad f(x)=g(x)$$

を満たすならば、次式が成り立つ。

$$(\forall z\in\mathbb{C})\quad f(z)=g(z).$$

例 21.11 (実関数を正則に拡張する仕方は 1 つしかない)

この講義では、初等関数を、微積分で得られた Taylor 展開を用いて正則関数に拡張した。例えば

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\quad (x\in\mathbb{R})$$

から

$$(\star)\qquad \cos z:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}\quad (z\in\mathbb{C}).$$

上で述べたことから、正則な $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ で、$f(x)=\cos x$ $(x\in\mathbb{R})$ を満たすものは、存在するならば一意である。言い換えると、$\cos x$ の拡張に、正則性を要求する限り、$(\star)$ とする以外の選択肢はない。 □

例 21.12 (関数関係不変の原理 (英語では言わない？))

例えば実指数関数の指数法則

$$e^{x+y} = e^x e^y \quad (x, y \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

が成り立つことは既知として、複素指数関数の指数法則

$$e^{z+w} = e^z e^w \quad (z, w \in \mathbb{C})$$

が成り立つことを示そう。

例 21.12 (関数関係不変の原理 (英語では言わない？))

例えば実指数関数の指数法則

$$e^{x+y}=e^x e^y \quad (x,y\in\mathbb{R}) \tag{2}$$

が成り立つことは既知として、複素指数関数の指数法則

$$e^{z+w}=e^z e^w \quad (z,w\in\mathbb{C})$$

が成り立つことを示そう。

実指数関数と複素指数関数を混同すると分かりにくくなるので、しばらく複素指数関数 e^z は $E(z)$, 実指数関数は e^x と書き分ける。E は e^x の拡張である。つまり

$$(\forall x\in\mathbb{R})\quad E(x)=e^x$$

が成り立つことを認めて議論する [a]。

例 21.12 (関数関係不変の原理 (英語では言わない？))

例えば実指数関数の指数法則

$$e^{x+y} = e^x e^y \quad (x, y \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

が成り立つことは既知として、複素指数関数の指数法則

$$e^{z+w} = e^z e^w \quad (z, w \in \mathbb{C})$$

が成り立つことを示そう。

実指数関数と複素指数関数を混同すると分かりにくくなるので、しばらく複素指数関数 e^z は $E(z)$, 実指数関数は e^x と書き分ける。E は e^x の拡張である。つまり

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad E(x) = e^x$$

が成り立つことを認めて議論する [a]。

任意の $y \in \mathbb{R}$ を固定して、関数 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を

$$f(z) := E(z+y) - E(z)E(y) \quad (z \in \mathbb{C})$$

で定める。関数 E は正則であるから、f は $\mathbb{C}$ で正則である。

例 21.12 (つづき)

また、$z = x \in \mathbb{R}$ のとき、(2) より

$$f(z) = f(x) = E(x+y) - E(x)E(y) = e^{x+y} - e^x e^y = e^x e^y - e^x e^y = 0.$$

例 21.12 (つづき)

また、$z = x \in \mathbb{R}$ のとき、(2) より

$$f(z) = f(x) = E(x+y) - E(x)E(y) = e^{x+y} - e^x e^y = e^x e^y - e^x e^y = 0.$$

ゆえに一致の定理により $(\forall z \in \mathbb{C})\ f(z) = 0$. すなわち

(3) $$(\forall y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C}) \quad E(z+y) - E(z)E(y) = 0.$$

例 21.12 (つづき)

また、$z = x \in \mathbb{R}$ のとき、(2) より

$$f(z) = f(x) = E(x+y) - E(x)E(y) = e^{x+y} - e^x e^y = e^x e^y - e^x e^y = 0.$$

ゆえに一致の定理により $(\forall z \in \mathbb{C})\ f(z) = 0$. すなわち

$$(\forall y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C}) \quad E(z+y) - E(z)E(y) = 0. \tag{3}$$

次に任意の $z \in \mathbb{C}$ を固定して、関数 $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を

$$g(w) := E(z+w) - E(z)E(w) \quad (w \in \mathbb{C})$$

で定める。この g は $\mathbb{C}$ で正則である。また、$w = y \in \mathbb{R}$ のとき、(3) より

$$g(w) = g(y) = E(z+y) - E(z)E(y) = 0.$$

例 21.12 (つづき)

また、$z = x \in \mathbb{R}$ のとき、(2) より

$$f(z) = f(x) = E(x+y) - E(x)E(y) = e^{x+y} - e^x e^y = e^x e^y - e^x e^y = 0.$$

ゆえに一致の定理により $(\forall z \in \mathbb{C})\ f(z) = 0$. すなわち

$$(\forall y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{C}) \quad E(z+y) - E(z)E(y) = 0. \tag{3}$$

次に任意の $z \in \mathbb{C}$ を固定して、関数 $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を

$$g(w) := E(z+w) - E(z)E(w) \quad (w \in \mathbb{C})$$

で定める。この g は $\mathbb{C}$ で正則である。また、$w = y \in \mathbb{R}$ のとき、(3) より

$$g(w) = g(y) = E(z+y) - E(z)E(y) = 0.$$

ゆえに一致の定理により $(\forall w \in \mathbb{C})\ g(w) = 0$. すなわち

$$(\forall z \in \mathbb{C})(\forall w \in \mathbb{C}) \quad E(z+w) - E(z)E(w) = 0.$$

ゆえに指数法則 $E(z+w) = E(z)E(w)$ が成り立つ。 $\square$

証明は次回講義に回すことにしました。　定理 21.9 の証明は結構長い。

定理 21.9 の証明

$f-g$ を新たに f と置いて考えることで、$g=0$ の場合に証明すれば良いことが分かる。

証明は次回講義に回すことにしました。　定理 21.9 の証明は結構長い。

定理 21.9 の証明

$f-g$ を新たに f と置いて考えることで、$g=0$ の場合に証明すれば良いことが分かる。

Step 1. D は開集合であるから、$(\exists\varepsilon>0)$ $\overline{D(c;\varepsilon)}\subset D$. 正則関数の冪級数展開可能性より、$\{a_n\}_{n\geq 0}$ が存在して、

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n \quad (z\in D(c;\varepsilon)).$$

まずこの円盤 $D(c;\varepsilon)$ で $f=0$ であることを示す。

9.2 一致の定理

証明は次回講義に回すことにしました。　定理 21.9 の証明は結構長い。

定理 21.9 の証明

$f-g$ を新たに f と置いて考えることで、$g=0$ の場合に証明すれば良いことが分かる。

Step 1. D は開集合であるから、$(\exists\varepsilon>0)$ $\overline{D(c;\varepsilon)}\subset D$. 正則関数の冪級数展開可能性より、$\{a_n\}_{n\ge 0}$ が存在して、

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n\quad(z\in D(c;\varepsilon)).$$

まずこの円盤 $D(c;\varepsilon)$ で $f=0$ であることを示す。

実は任意の n に対して $a_n=0$ である。実際、もしそうでないと仮定すると、
$\exists n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ s.t. $a_n\neq 0$. そのような n のうち、最小のものを k とおくと、

$$a_0=a_1=\cdots=a_{k-1}=0,\quad a_k\neq 0.$$

すると

$$f(z)=\sum_{n=k}^{\infty}a_n(z-c)^n=(z-c)^k\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+k}(z-c)^n\quad(z\in D(c;\varepsilon)).$$

定理 21.9 の証明 (続き)

$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z-c)^n$ は $z \in D(c;\varepsilon)$ で収束し、

$$g(z_n) = \frac{f(z_n)}{(z_n-c)^k} = \frac{0}{(z_n-c)^k} = 0.$$

ゆえに

$$a_k = g(c) = \lim_{n\to\infty} g(z_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

これは矛盾である。ゆえに任意の n に対して $a_n = 0$. ゆえに $f(z) = 0$ $(z \in D(c;\varepsilon))$.

定理 21.9 の証明 (続き)

$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z-c)^n$ は $z \in D(c;\varepsilon)$ で収束し、

$$g(z_n) = \frac{f(z_n)}{(z_n-c)^k} = \frac{0}{(z_n-c)^k} = 0.$$

ゆえに

$$a_k = g(c) = \lim_{n\to\infty} g(z_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

これは矛盾である。ゆえに任意の n に対して $a_n = 0$. ゆえに $f(z) = 0$ $(z \in D(c;\varepsilon))$.

Step 2.

$$D_0 := \left\{ z \in D \;\middle|\; (\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) = 0 \right\}, \quad D_1 := \left\{ z \in D \;\middle|\; (\exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) f^{(n)}(z) \neq 0 \right\}$$

とおくと (簡単な論理の法則を用いて)

$$D_0 \cup D_1 = D, \quad D_0 \cap D_1 = \emptyset.$$

実は D_0 と D_1 は開集合である (理由は次のスライド)。また $c \in D_0$ であるから $D_0 \neq \emptyset$.
以下に紹介する命題 21.13 より、$D_1 = \emptyset$, $D_0 = D$. ゆえに $f = 0$ in D.

定理 21.9 の証明 (続き)

D_0 は開集合であること 実際、$z_0 \in D_0$ ならば、$(\exists R > 0)$ $(\exists \{a_n\}_{n\geq 0}$: 複素数列$)$ $(\forall z \in D(z_0; R))$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. ところが $z_0 \in D_0$ より、任意の n に対して $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = 0$ なので、$f(z) = 0$. ゆえに $D(z_0; R) \subset D_0$. ゆえに D_0 は開集合である。

定理 21.9 の証明 (続き)

D_0 は開集合であること 実際、$z_0 \in D_0$ ならば、$(\exists R > 0)$ $(\exists \{a_n\}_{n\ge 0}$: 複素数列) $(\forall z \in D(z_0; R))$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. ところが $z_0 \in D_0$ より、任意の n に対して $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = 0$ なので、$f(z) = 0$. ゆえに $D(z_0; R) \subset D_0$. ゆえに D_0 は開集合である。

D_1 は開集合であること $f^{(n)}$ が連続関数であることから、D_1 は開集合であることが分かる。実際、$z_0 \in D_1$ とするとき、$(\exists n \in \mathbb{Z}_{\ge 0})$ $f^{(n)}(z_0) \ne 0$.

- D が開集合であることから、$(\exists \delta_1 > 0)$ $D(z_0; \delta_1) \subset D$.
- $\varepsilon := \left| f^{(n)}(z_0) \right|$ とおくと、$\varepsilon > 0$ であり、$f^{(n)}$ は連続であるから、$(\exists \delta_2 > 0)$ $(\forall z \in D\colon |z - z_0| < \delta_2)$ $\left| f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_0) \right| < \varepsilon$. このとき

$$\left| f^{(n)}(z) \right| = \left| f^{(n)}(z_0) - f^{(n)}(z_0) + f^{(n)}(z) \right| \ge \left| f^{(n)}(z_0) \right| - \left| f^{(n)}(z_0) - f^{(n)}(z) \right| > \varepsilon - \varepsilon = 0.$$

  ゆえに $f^{(n)}(z) \ne 0$. 従って $z \in D_1$.

$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと、$\delta > 0$ かつ $D(z; \delta) \subset D_1$. ゆえに D_1 は開集合である。 □

命題 21.13 (弧連結な開集合は連結)

D は $\mathbb{C}$ の弧連結な開集合、D_0 と D_1 は $\mathbb{C}^n$ の開集合で $D_0 \cup D_1 = D$, $D_0 \cap D_1 = \emptyset$ とすると、D_0 と D_1 のいずれかが空集合である。

命題 21.13 の証明　背理法を用いる。$D_0 \neq \emptyset$ かつ $D_1 \neq \emptyset$ と仮定して矛盾を導く。
$c_0 \in D_0$, $c_1 \in D_1$ を取る。
D は弧連結であるから、$\varphi(0) = c_0$, $\varphi(1) = c_1$ を満たす連続な $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ が存在する。

$$I_0 := \{t \in [0,1] \mid \varphi(t) \in D_0\}, \quad I_1 := \{t \in [0,1] \mid \varphi(t) \in D_1\}$$

とおくと

$$I_0 \cup I_1 = [0,1], \quad I_0 \cap I_1 = \emptyset, \quad 0 \in I_0, \quad 1 \in I_1.$$

命題 21.13 (弧連結な開集合は連結)

D は $\mathbb{C}$ の弧連結な開集合、D_0 と D_1 は $\mathbb{C}^n$ の開集合で $D_0 \cup D_1 = D$, $D_0 \cap D_1 = \emptyset$ とすると、D_0 と D_1 のいずれかが空集合である。

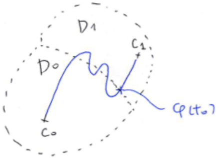
命題 21.13 の証明 背理法を用いる。$D_0 \neq \emptyset$ かつ $D_1 \neq \emptyset$ と仮定して矛盾を導く。
$c_0 \in D_0$, $c_1 \in D_1$ を取る。
D は弧連結であるから、$\varphi(0) = c_0$, $\varphi(1) = c_1$ を満たす連続な $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ が存在する。

$$I_0 := \{t \in [0,1] \mid \varphi(t) \in D_0\}, \quad I_1 := \{t \in [0,1] \mid \varphi(t) \in D_1\}$$

とおくと

$$I_0 \cup I_1 = [0,1], \quad I_0 \cap I_1 = \emptyset, \quad 0 \in I_0, \quad 1 \in I_1.$$

D_0 と D_1 は開集合、φ は連続であるから、$(\exists \delta_0 > 0)$ $(\exists \delta_1 > 0)$
$[0,\delta_0] \subset I_0 \wedge [1-\delta_1, 1] \subset I_1$.



$t_0 := \sup I_0$ とおくと、$0 < t_0 < 1$. t_0 と $0, 1$ との距離は $d := \min\{t_0, 1-t_0\} > 0$.

9.2 一致の定理

証明 (続き) $t_0 \in I_0$ の場合、$\exists \varepsilon_1 \in (0, d)$ s.t. $(t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1) \subset I_0$. すると
$t_0 = \sup I_0 \geq t_0 + \varepsilon_1$ となり、矛盾が生じる。
$t_0 \in I_1$ の場合、$\exists \varepsilon_2 \in (0, d)$ s.t. $(t_0 - \varepsilon_2, t_0 + \varepsilon_2) \subset I_1$. I_1 と共通部分のない I_0 の上限が I_1 の内部にあるのは矛盾である。

参考文献

[1] 杉浦光夫：解析入門 II, 東京大学出版会 (1985), https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046844.

[2] 笠原乾吉：複素解析，1 変数解析関数, 実教出版 (1978), 2016 年にちくま学芸文庫に入った (ファンとして非常に嬉しい)。新井仁之先生の書評が http://researchmap.jp/joqp1cgc9-1782088/ にある。ついに Kindle 化されたので買えなくなることはなくなったが、 数式の見栄えが poor である。文庫に入ったのは最近のことなのに、なぜこうなる??

[3] 桂田祐史：多変数の微分積分学 2 講義ノート 第 2 部, http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/tahensuu2/tahensuu2-p2.pdf (2006〜).