複素関数・同演習 第 20 回

～円盤における Cauchy の積分公式 (第 2 回), 正則関数の冪級数展開～

桂田 祐史（かつらだ まさし）

2020 年 12 月 2 日

目次

本日の内容・連絡事項

- ようやく Cauchy の積分公式が証明できた。この後は速く事(こと)が進む。まずは、正則関数の冪級数展開可能性 (解析性) を示す。この定理の重要性はどれほど強調してもしすぎにはならないだろう。系として(ついでに?)「原始関数が存在すれば正則」という懸案の定理, 有名な Morera の定理の証明もできる。また冪級数展開の収束半径についても考察する。… ここまでが §7.2. 速い進行。必修。
- 前回、大急ぎで Cauchy の積分公式 (ただし円盤領域バージョン) を証明したが、違う証明を採用しているテキストも多い。理解に役立つと思われるので、少し解説する (§7.3)。そのために必要な積分路の変形の証明は、バラエティに富んでいる。それについては §7.4 を用意したが、この部分は動画では解説しない。
- §7 の内容は、この講義と、講義ノート [1] でほぼ同じであるが、中の分け方は対応していない (今後講義ノートの方をこちらのスライドの内容に合わせる予定)。
- 宿題 10 を出します (締め切りは 12 月 8 日 13:30)。

7.1 円盤における Cauchy の積分公式 (続き)

前回、円盤における Cauchy の積分公式の証明に、次の補題を用いた。

補題 20.1 (とても重要な線積分 (再掲))

$a, c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ とするとき

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = \begin{cases} 2\pi i & (|c-a| < r \text{ のとき}) \\ 0 & (|c-a| > r \text{ のとき}). \end{cases}$$

すでに証明してあるが、教育的効果が高いと思われるので、別証明をする。

7.1 円盤における Cauchy の積分公式 (続き)

前回、円盤における Cauchy の積分公式の証明に、次の補題を用いた。

補題 20.1 (とても重要な線積分 (再掲))

$a, c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ とするとき

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = \begin{cases} 2\pi i & (|c-a| < r \text{ のとき}) \\ 0 & (|c-a| > r \text{ のとき}). \end{cases}$$

すでに証明してあるが、教育的効果が高いと思われるので、別証明をする。

そのために「一様収束ならば項別積分可能」という定理 (定理 20.2) を用いる。
これはこの後出てくる重要な定理 20.3 の証明でも活躍する。

7.1 円盤における Cauchy の積分公式 (続き)

前回、円盤における Cauchy の積分公式の証明に、次の補題を用いた。

補題 20.1 (とても重要な線積分 (再掲))

$a, c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ とするとき

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = \begin{cases} 2\pi i & (|c-a| < r \text{ のとき}) \\ 0 & (|c-a| > r \text{ のとき}). \end{cases}$$

すでに証明してあるが、教育的効果が高いと思われるので、別証明をする。

そのために「一様収束ならば項別積分可能」という定理 (定理 20.2) を用いる。これはこの後出てくる重要な定理 20.3 の証明でも活躍する。

「一様収束ならば項別積分可能」は、実関数の場合には証明したが、複素関数の場合にはまだ証明していないので、次のスライドで証明する (本質的には同じ証明である)。

定理 20.2 (一様収束ならば項別積分可能)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、C は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、C の像 C^* 上で連続な関数列で、C^* で関数 f に一様収束するとする。このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz.$$

定理 20.2 (一様収束ならば項別積分可能)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、C は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、C の像 C^* 上で連続な関数列で、C^* で関数 f に一様収束するとする。このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz.$$

証明　f は、一様収束する連続関数列の極限であるから、連続である。

定理 20.2 (一様収束ならば項別積分可能)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、C は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、C の像 C^* 上で連続な関数列で、C^* で関数 f に一様収束するとする。このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\,dz=\int_C f(z)\,dz.$$

証明 f は、一様収束する連続関数列の極限であるから、連続である。

$$\left|\int_C f_n(z)\,dz-\int_C f(z)\,dz\right|\le\int_C|f_n(z)-f(z)|\,|dz|\le\max_{\zeta\in C^*}|f_n(\zeta)-f(\zeta)|\int_C|dz|.$$

最後の $\displaystyle\int_C|dz|$ は C の弧長である (n によらない有限の数)。

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

定理 20.2 (一様収束ならば項別積分可能)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、C は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線、$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、C の像 C^* 上で連続な関数列で、C^* で関数 f に一様収束するとする。このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz.$$

証明　f は、一様収束する連続関数列の極限であるから、連続である。

$$\left|\int_C f_n(z)\,dz - \int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f_n(z)-f(z)|\,|dz| \le \max_{\zeta\in C^*}|f_n(\zeta)-f(\zeta)|\int_C |dz|.$$

最後の $\displaystyle\int_C |dz|$ は C の弧長である (n によらない有限の数)。
$\{f_n\}$ が C^* で f に一様収束とは、$n\to\infty$ のとき $\displaystyle\max_{\zeta\in C^*}|f_n(\zeta)-f(\zeta)|\to 0$ を意味するので、

$$\int_C f_n(z)\,dz \to \int_C f(z)\,dz \quad (n\to\infty). \qquad \square$$

補題 20.1 ($|c-a|<r$ の場合) の証明 2 — 式変形でやるので分かりやすいかも
$|z-c|=r$ を満たす任意の z に対して

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{(z-c)-(a-c)}=\frac{1}{z-c}\cdot\frac{1}{1-\frac{a-c}{z-c}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}.$$

補題 20.1 ($|c-a|<r$ の場合) の証明 2 — 式変形でやるので分かりやすいかも
$|z-c|=r$ を満たす任意の z に対して

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{(z-c)-(a-c)}=\frac{1}{z-c}\cdot\frac{1}{1-\frac{a-c}{z-c}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}.$$

これは等比級数で、$|z-c|=r$ 上で $|\text{公比}|=\left|\dfrac{a-c}{z-c}\right|=\dfrac{|a-c|}{r}<1$ (定数) であるから、Weierstrass の M-test より一様収束する。

補題 20.1 ($|c-a|<r$ の場合) の証明 2 — 式変形でやるので分かりやすいかも
$|z-c|=r$ を満たす任意の z に対して

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{(z-c)-(a-c)}=\frac{1}{z-c}\cdot\frac{1}{1-\frac{a-c}{z-c}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}.$$

これは等比級数で、$|z-c|=r$ 上で $|$ 公比 $|=\left|\frac{a-c}{z-c}\right|=\frac{|a-c|}{r}<1$ (定数) であるから、Weierstrass の M-test より一様収束する。ゆえに命題 20.2 より項別積分が可能で

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}=\int_{|z-c|=r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}dz=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{|z-c|=r}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}dz.$$

すでに何度か見たように、$\displaystyle\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{(z-c)^{n+1}}=2\pi i\delta_{n0}$ であるから、$n=0$ の項のみ残り

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}=2\pi i. \qquad \square$$

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

補題 20.1 ($|c-a|<r$ の場合) の証明 2 — 式変形でやるので分かりやすいかも
$|z-c|=r$ を満たす任意の z に対して

$$\frac{1}{z-a}=\frac{1}{(z-c)-(a-c)}=\frac{1}{z-c}\cdot\frac{1}{1-\frac{a-c}{z-c}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}.$$

これは等比級数で、$|z-c|=r$ 上で $|$ 公比 $|=\left|\dfrac{a-c}{z-c}\right|=\dfrac{|a-c|}{r}<1$ (定数) であるから、Weierstrass の M-test より一様収束する。ゆえに命題 20.2 より項別積分が可能で

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}=\int_{|z-c|=r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}dz=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{|z-c|=r}\frac{(a-c)^n}{(z-c)^{n+1}}dz.$$

すでに何度か見たように、$\displaystyle\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{(z-c)^{n+1}}=2\pi i\delta_{n0}$ であるから、$n=0$ の項のみ残り

$$\int_{|z-c|=r}\frac{dz}{z-a}=2\pi i. \qquad \square$$

補題 20.1 に対して、積分路の方を変形する証明 (前回)、被積分関数を変形する証明 (このスライド)、2 つの証明を見せた。

定理 20.3 (正則関数は冪級数展開可能である, 正則関数は解析的である)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in \Omega$, $R > 0$, $D := D(c; R)$ とおくとき $\overline{D} \subset \Omega$ が成り立つとする。このとき、

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, 1, \cdots)$$

とおくと

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n \quad (z \in D).$$

定理 20.3 (正則関数は冪級数展開可能である, 正則関数は解析的である)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in \Omega$, $R > 0$, $D := D(c;R)$ とおくとき $\overline{D} \subset \Omega$ が成り立つとする。このとき、

$$a_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}\,d\zeta \quad (n = 0, 1, \cdots)$$

とおくと

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n \quad (z \in D).$$

証明　円盤領域における Cauchy の積分公式より、任意の $z \in D$ に対して

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

定理 20.3 (正則関数は冪級数展開可能である, 正則関数は解析的である)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則、$c\in\Omega$, $R>0$, $D:=D(c;R)$ とおくとき $\overline{D}\subset\Omega$ が成り立つとする。このとき、

$$a_n:=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-c)^{n+1}}d\zeta\quad(n=0,1,\cdots)$$

とおくと

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n\quad(z\in D).$$

証明　円盤領域における Cauchy の積分公式より、任意の $z\in D$ に対して

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

次の変形は少し長いが、すでによく知っているものである。

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-c)-(z-c)}=\frac{1}{\zeta-c}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-c}{\zeta-c}}=\frac{1}{\zeta-c}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-c}{\zeta-c}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}}.$$

ゆえに

(1)
$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z-c)^n}{(\zeta - c)^{n+1}}.$$

ゆえに

$$(1) \qquad \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z-c)^n}{(\zeta - c)^{n+1}}.$$

これは ζ の関数として C^* で一様収束する。実際 $r := \dfrac{|z-c|}{R}$ とおくと $r < 1$ であり

$$\left| f(\zeta) \frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}} \right| = |f(\zeta)| \frac{|z-c|^n}{R^{n+1}} \le \frac{\max\limits_{\zeta \in C^*} |f(\zeta)|}{R} r^n.$$

$M_n := \dfrac{\max |f|}{R} r^n$ とおくと、$|$ 一般項 $| \le M_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$ であるから、Weierstrass の M-test により、(1) の右辺の一様収束が分かる。

ゆえに

$$\text{(1)} \qquad \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z-c)^n}{(\zeta - c)^{n+1}}.$$

これは ζ の関数として C^* で一様収束する。実際 $r := \dfrac{|z-c|}{R}$ とおくと $r < 1$ であり

$$\left| f(\zeta) \frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}} \right| = |f(\zeta)| \frac{|z-c|^n}{R^{n+1}} \le \frac{\max_{\zeta \in C^*} |f(\zeta)|}{R} r^n.$$

$M_n := \dfrac{\max |f|}{R} r^n$ とおくと、$|$ 一般項 $| \le M_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$ であるから、Weierstrass の M-test により、(1) の右辺の一様収束が分かる。ゆえに命題 20.2 より項別積分が可能で

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - c| = R} \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{|\zeta - c| = R} \frac{f(\zeta)(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}} d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n. \qquad \square$$

7.2.1 正則関数の解析性

ゆえに

(1) $$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta)\frac{(z-c)^n}{(\zeta - c)^{n+1}}.$$

これは ζ の関数として C^* で一様収束する。実際 $r := \dfrac{|z-c|}{R}$ とおくと $r < 1$ であり

$$\left| f(\zeta)\frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}} \right| = |f(\zeta)| \frac{|z-c|^n}{R^{n+1}} \le \frac{\max_{\zeta\in C^*} |f(\zeta)|}{R} r^n.$$

$M_n := \dfrac{\max|f|}{R} r^n$ とおくと、| 一般項 | $\le M_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$ であるから、Weierstrass の M-test により、(1) の右辺の一様収束が分かる。ゆえに命題 20.2 より項別積分が可能で

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-c|=R} \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta)\frac{(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{|\zeta-c|=R} \frac{f(\zeta)(z-c)^n}{(\zeta-c)^{n+1}} d\zeta$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n. \quad \square$$

…… 重要な定理が、こんなに手早く (スライド 1 枚半で) 証明できるとは。ここは関数論の 1 つのクライマックスだろう。(当然？) 本日一番重要な結果である。

7.2.1 正則関数の解析性

定義 20.4 (解析的, 解析関数)

関数 f が、定義域内の各点のある近傍で冪級数展開できるとき、f は**解析的** (**analytic**) であるといい、解析的な関数を**解析関数** (**analytic function**) と呼ぶ。

定理 20.3 より「任意の正則関数は解析的である」。

7.2.1 正則関数の解析性

定義 20.4 (解析的, 解析関数)

関数 f が、定義域内の各点のある近傍で冪級数展開できるとき、f は**解析的** (**analytic**) であるといい、解析的な関数を**解析関数** (**analytic function**) と呼ぶ。

定理 20.3 より「任意の正則関数は解析的である」。

解析関数という言葉は、解析的である関数という以外に、(後で定義する) **解析接続**により定まる関数、という意味で用いられる場合もある。

7.2.1 正則関数の解析性

定義 20.4 (解析的, 解析関数)

関数 f が、定義域内の各点のある近傍で冪級数展開できるとき、f は**解析的** (**analytic**) であるといい、解析的な関数を**解析関数** (**analytic function**) と呼ぶ。

定理 20.3 より「任意の正則関数は解析的である」。

解析関数という言葉は、解析的である関数という以外に、(後で定義する) **解析接続**により定まる関数、という意味で用いられる場合もある。

系 20.5

正則関数は何回でも微分可能である。

7.2.1 正則関数の解析性

定義 20.4 (解析的, 解析関数)

関数 f が、定義域内の各点のある近傍で冪級数展開できるとき、f は**解析的** (analytic) であるといい、解析的な関数を**解析関数** (analytic function) と呼ぶ。

定理 20.3 より「任意の正則関数は解析的である」。

解析関数という言葉は、解析的である関数という以外に、(後で定義する) **解析接続**により定まる関数、という意味で用いられる場合もある。

系 20.5

正則関数は何回でも微分可能である。

証明 正則関数は定義域の各点の近傍で冪級数展開可能であり、冪級数は何回でも微分可能であるから。 □

7.2.1 正則関数の解析性

系 20.6

複素関数が原始関数を持つならば実は正則である。

系 20.6

複素関数が原始関数を持つならば実は正則である。

証明　複素関数 f に対して、$F' = f$ を満たす関数 F が存在したとする。F は正則であるから何回でも微分可能である。特に F が 2 回微分可能であることから、f は微分可能である。すなわち f は正則である。 □

7.2.1 正則関数の解析性

系 20.6

複素関数が原始関数を持つならば実は正則である。

証明　複素関数 f に対して、$F' = f$ を満たす関数 F が存在したとする。F は正則であるから何回でも微分可能である。特に F が 2 回微分可能であることから、f は微分可能である。すなわち f は正則である。 □

注意　第 18 回の講義で次の 3 条件をあげ、(i)⇔(ii) を証明してあった。

- (i) f が Ω での原始関数を持つ ($\exists F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ s.t. $F' = f$)
- (ii) Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C について、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ が成り立つ
- (iii) f は Ω で正則である

7.2.1 正則関数の解析性

系 20.6

複素関数が原始関数を持つならば実は正則である。

証明　複素関数 f に対して、$F' = f$ を満たす関数 F が存在したとする。F は正則であるから何回でも微分可能である。特に F が 2 回微分可能であることから、f は微分可能である。すなわち f は正則である。 □

注意　第 18 回の講義で次の 3 条件をあげ、(i)⇔(ii) を証明してあった。

(i) f が Ω での原始関数を持つ ($\exists F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ s.t. $F' = f$)

(ii) Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C について、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ が成り立つ

(iii) f は Ω で正則である

予告した (i)⇒(iii) (これが系 20.6) がやっと証明できた。ゆえに **Morera の定理** ((ii)⇒ (iii) という内容) も証明できた。宿題完了。

7.2.1 正則関数の解析性

系 20.6

複素関数が原始関数を持つならば実は正則である。

証明　複素関数 f に対して、$F' = f$ を満たす関数 F が存在したとする。F は正則であるから何回でも微分可能である。特に F が 2 回微分可能であることから、f は微分可能である。すなわち f は正則である。 □

注意　第 18 回の講義で次の 3 条件をあげ、(i)⇔(ii) を証明してあった。

- (i) f が Ω での原始関数を持つ ($\exists F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ s.t. $F' = f$)
- (ii) Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C について、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ が成り立つ
- (iii) f は Ω で正則である

予告した (i)⇒(iii) (これが系 20.6) がやっと証明できた。ゆえに **Morera の定理** ((ii)⇒ (iii) という内容) も証明できた。宿題完了。

やれやれ…(肩の荷が降りる)

本当は逆関数定理, 正則関数の実部・虚部の調和性についても言及すべきだった (12/7 追記)。

7.2.2 冪級数展開の収束半径

正則関数は定義域に属する任意の点の周りに冪級数展開できる (定理 21.3)。その収束半径について何がわかるだろうか。

7.2.2 冪級数展開の収束半径

正則関数は定義域に属する任意の点の周りに冪級数展開できる (定理 21.3)。その収束半径について何がわかるだろうか。

一般的な定理を紹介する前に、実例で考えよう。例えば

$$\Omega := \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2+1} \quad (z \in \Omega), \quad c = 0.$$

(もちろん、$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}$ が冪級数展開で、収束半径 $\rho = 1$ と分かるが、具体的に冪級数展開しないで、そのことを示せないか、考えてみよう。)

7.2.2 冪級数展開の収束半径

正則関数は定義域に属する任意の点の周りに冪級数展開できる (定理 21.3)。その収束半径について何がわかるだろうか。

一般的な定理を紹介する前に、実例で考えよう。例えば

$$\Omega := \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2+1} \quad (z \in \Omega), \quad c = 0.$$

(もちろん、$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}$ が冪級数展開で、収束半径 $\rho = 1$ と分かるが、具体的に冪級数展開しないで、そのことを示せないか、考えてみよう。)

$0 < R < 1$ を満たす任意の R について、f は $D(0;R)$ で正則で、$\overline{D(0;R)} \subset \Omega$ が成り立つので、定理 20.3 より、f は $D(0;R)$ で冪級数展開できる。すなわち、ある $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が存在して

$$(\forall z \in D(0;R)) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{2}$$

R の取り方には自由度があるが、$\{a_n\}_{n\geq 0}$ 自体は R によらずに定まる (繰り返しになるが $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ でこれは共通である)。

7.2.2 冪級数展開の収束半径

任意の $R \in (0,1)$ に対して、(2) が成り立つので、次式が成り立つ。

$$(\forall z \in D(0;1)) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{3}$$

7.2.2 冪級数展開の収束半径

任意の $R \in (0,1)$ に対して、(2) が成り立つので、次式が成り立つ。

(3)
$$(\forall z \in D(0;1)) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

この右辺の冪級数の収束半径 ρ は何だろう。$D(0;1)$ で収束するので、収束半径の定義から $\rho \geq 1$ が導けるが、実は $\rho = 1$ である。直観的には、円周 $|z-0| = 1$ の上に f の特異点 $\pm i$ があるからであるが、きちんと示そう。

7.2.2 冪級数展開の収束半径

任意の $R \in (0,1)$ に対して、(2) が成り立つので、次式が成り立つ。

$$(3) \qquad (\forall z \in D(0;1)) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

この右辺の冪級数の収束半径 ρ は何だろう。$D(0;1)$ で収束するので、収束半径の定義から $\rho \geq 1$ が導けるが、実は $\rho = 1$ である。直観的には、円周 $|z-0| = 1$ の上に f の特異点 $\pm i$ があるからであるが、きちんと示そう。

$\rho > 1$ と仮定して矛盾を導く。$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束円 $D(0;\rho)$ で正則で、背理法の仮定 $\rho > 1$ から $i \in D(0;\rho)$ であるから、$z \to i$ のとき有限な複素数に収束する。特に

$$\lim_{\substack{z \to i \\ z \in D(0;1)}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}.$$

ところが $z \to i$ のとき $f(z) = \frac{1}{z^2+1} \to \infty$. 特に

$$\lim_{\substack{z \to i \\ z \in D(0;1)}} f(z) = \infty.$$

これは (3) に矛盾する。

7.2.2 冪級数展開の収束半径

以上の議論は一般化できて次の定理が得られる (証明を書くのはサボるけど簡単)。

定理 20.7 (冪級数展開の収束半径 — 特異点があればそこまで)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in \Omega$, $R > 0$ で $D(c; R) \subset \Omega$、円周 $|z - c| = R$ 上に f の特異点 z_0 (ここでは $\lim_{z \to z_0} f(z)$ が収束しない、と言う意味) が存在するならば、f の c における冪級数展開の収束半径は R である。

7.2.2 冪級数展開の収束半径

以上の議論は一般化できて次の定理が得られる (証明を書くのはサボるけど簡単)。

定理 20.7 (冪級数展開の収束半径 — 特異点があればそこまで)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則、$c\in\Omega$, $R>0$ で $D(c;R)\subset\Omega$、円周 $|z-c|=R$ 上に f の特異点 z_0 (ここでは $\lim_{z\to z_0}f(z)$ が収束しない、と言う意味) が存在するならば、f の c における冪級数展開の収束半径は R である。

この定理はかなり使えて便利である (マスターしよう) が、これでは扱えない場合もある。

7.2.2 冪級数展開の収束半径

以上の議論は一般化できて次の定理が得られる (証明を書くのはサボるけど簡単)。

定理 20.7 (冪級数展開の収束半径 — 特異点があればそこまで)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in \Omega$, $R > 0$ で $D(c; R) \subset \Omega$、円周 $|z - c| = R$ 上に f の特異点 z_0 (ここでは $\lim_{z \to z_0} f(z)$ が収束しない、と言う意味) が存在するならば、f の c における冪級数展開の収束半径は R である。

この定理はかなり使えて便利である (マスターしよう) が、これでは扱えない場合もある。

(以下ちょっと細かい話になる) 例えば $g(z) = \mathrm{Li}_2(z)$ (二重対数関数…知らなくて良い) は、通常 $[1, +\infty)$ を分岐截線として、$\mathbb{C} \setminus [1, +\infty)$ で正則と定義される。0 での冪級数展開は

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \quad (z \in D(0; 1)).$$

この冪級数の収束半径が 1 であることはすぐ分かる。ゆえにある $R > 1$ が存在して、g が $D(0; R)$ で正則ということはあり得ない (それは二重対数関数を知らなくても分かる)。一方、この冪級数は $\overline{D}(0; 1)$ で一様収束するので、g は $\overline{D}(0; 1)$ に制限すると、(1 も含めて) 連続であることも分かる。この冪級数の収束半径が 1 であることは、定理 20.8 からは示せない。

7.2.2 冪級数展開の収束半径

次の形にしておくと (やや定理の主張が分かりにくいが)、広い場合に適用できる。

定理 20.8 (冪級数展開の収束半径)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合で、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、$c \in \Omega$ とする。

$$A = \left\{ R \in (0, +\infty) \;\middle|\; \begin{array}{l} D(c; R) \text{ で正則な関数 } F \text{ と } \varepsilon \in (0, R] \text{ が存在して、} \\ D(c; \varepsilon) \text{ で } f = F \end{array} \right\}$$

とおくとき、f の c の周りの冪級数展開の収束半径 ρ は $\sup A$ に等しい。

次のスライドに証明を書いておくが、話が細かくなるので動画での説明は省略する。

証明.

最初に $\rho > 0$ であることを注意する。(明らかに近いが、一応証明を書くと、開集合であることから $(\exists\varepsilon > 0)$ $D(c;\varepsilon) \subset \Omega$. $R = \varepsilon/2$ と取れば $\overline{D}(c;R) \subset \Omega$. 定理 21.3 より $R \in A$. ゆえに $\rho = \sup A \geq R > 0$.)

ρ が有限の数である場合

- 収束半径の定義により、$\rho \in A$. ゆえに $\rho \leq \sup A$.
- 一方、$R \in A$ とするとき、任意の $\varepsilon \in (0,R)$ に対して $\overline{D}(c;R-\varepsilon) \subset \Omega$ であるから、定理 21.3 より、f の c の周りの冪級数展開は $D(c;R-\varepsilon)$ で収束する。ゆえに収束半径の定義から $R-\varepsilon \leq \rho$. これが任意の ε について成り立つことから、$R \leq \rho$. ゆえに $\sup A \leq \rho$.

以上から $\rho = \sup A$.

$\rho = +\infty$ である場合、f の c の周りの冪級数展開は $\mathbb{C}$ 全体で収束するので、その和が定める関数は $\mathbb{C}$ で正則である。特に任意の正の実数 R に対して、その冪級数は $D(c;R)$ で収束するので、$R \in A$. ゆえに $\sup A = +\infty$. すなわち $\rho = \sup A$. □

7.3 Cauchy の積分公式の別証明

じつは、Cauchy の積分公式の証明には色々な方法があり、それに応じて定理もいくつかのバージョンがある。それらについて学ぶのは有意義だと思われるので、少し説明する。

7.3 Cauchy の積分公式の別証明

じつは、Cauchy の積分公式の証明には色々な方法があり、それに応じて定理もいくつかのバージョンがある。それらについて学ぶのは有意義だと思われるので、少し説明する。

まず既に説明した証明を振り返ってみよう。

証明のあらすじ　関数 $z \mapsto \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$ は Ω で連続かつ a を除いて正則であるから、星型領域における Cauchy の積分定理で

$$\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = 0.$$

7.3 Cauchy の積分公式の別証明

じつは、Cauchy の積分公式の証明には色々な方法があり、それに応じて定理もいくつかのバージョンがある。それらについて学ぶのは有意義だと思われるので、少し説明する。

まず既に説明した証明を振り返ってみよう。

証明のあらすじ　関数 $z \mapsto \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$ は Ω で連続かつ a を除いて正則であるから、星型領域における Cauchy の積分定理で

$$\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = 0.$$

移項して

$$\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_{|z-c|=R} \frac{f(a)}{z-a}\,dz = f(a)\int_{|z-c|=R} \frac{dz}{z-a}.$$

7.3 Cauchy の積分公式の別証明

じつは、Cauchy の積分公式の証明には色々な方法があり、それに応じて定理もいくつかのバージョンがある。それらについて学ぶのは有意義だと思われるので、少し説明する。

まず既に説明した証明を振り返ってみよう。

証明のあらすじ　関数 $z \mapsto \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$ は Ω で連続かつ a を除いて正則であるから、星型領域における Cauchy の積分定理で

$$\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = 0.$$

移項して

$$\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_{|z-c|=R} \frac{f(a)}{z-a}\,dz = f(a)\int_{|z-c|=R} \frac{dz}{z-a}.$$

$|a-c|<R$ のとき $\displaystyle\int_{|z-c|=R} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$ であるから、右辺は $2\pi i f(a)$ に等しい。ゆえに

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a). \quad \square$$

積分路の変形による Cauchy の積分公式の別証明 (ちょっと注目…次のスライドまで)

多くのテキストで、“積分路の変形” を用いる証明が採用されている。この方法は発展性がある (円周でない閉曲線 C に対して、積分公式が示せたりする。)

その方法で (あくまでも円盤の場合に) 証明してみよう。$|c-a|<R$ だから $R-|c-a|>0$. $0<\varepsilon<R-|c-a|$ を満たす任意の ε に対して

$$\int_{|z-c|=R}\frac{f(z)}{z-a}\,dz=\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}\,dz \tag{4}$$

が成り立つことを導く (積分路を $|z-c|=R$ から $|z-a|=\varepsilon$ に変形した)。

積分路の変形による Cauchy の積分公式の別証明 (ちょっと注目…次のスライドまで)

多くのテキストで、“積分路の変形” を用いる証明が採用されている。この方法は発展性がある (円周でない閉曲線 C に対して、積分公式が示せたりする。)

その方法で (あくまでも円盤の場合に) 証明してみよう。$|c-a|<R$ だから $R-|c-a|>0$. $0<\varepsilon<R-|c-a|$ を満たす任意の ε に対して

$$\int_{|z-c|=R}\frac{f(z)}{z-a}\,dz=\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}\,dz \tag{4}$$

が成り立つことを導く (積分路を $|z-c|=R$ から $|z-a|=\varepsilon$ に変形した)。

(4) が示されれば、$z=a+\varepsilon e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ とおいて

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}}\cdot i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta.$$

$\varepsilon\to 0$ とすると

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta\to\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a)\,d\theta=f(a). \tag{$\spadesuit$}$$

となることは容易に分かる (次のスライド)。

積分路の変形による Cauchy の積分公式の別証明 (ちょっと注目…次のスライドまで)

多くのテキストで、"積分路の変形" を用いる証明が採用されている。この方法は発展性がある (円周でない閉曲線 C に対して、積分公式が示せたりする。)

その方法で (あくまでも円盤の場合に) 証明してみよう。$|c-a|<R$ だから $R-|c-a|>0$. $0<\varepsilon<R-|c-a|$ を満たす任意の ε に対して

$$\int_{|z-c|=R}\frac{f(z)}{z-a}\,dz=\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}\,dz \tag{4}$$

が成り立つことを導く (積分路を $|z-c|=R$ から $|z-a|=\varepsilon$ に変形した)。

(4) が示されれば、$z=a+\varepsilon e^{i\theta}$ $(\theta\in[0,2\pi])$ とおいて

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}}\cdot i\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta.$$

$\varepsilon\to 0$ とすると

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta\to\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a)\,d\theta=f(a). \tag{$\spadesuit$}$$

となることは容易に分かる (次のスライド)。ゆえに

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-c|=R}\frac{f(z)}{z-a}\,dz=f(a).$$

7.3 Cauchy の積分公式の別証明

(♠) を確認しよう。差の絶対値を評価する。

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{i\theta})d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a)d\theta\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(a+\varepsilon e^{i\theta})-f(a)\right)d\theta\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\sup_{\theta\in[0,2\pi]}\left|f(a+\varepsilon e^{i\theta})-f(a)\right|\int_0^{2\pi}d\theta \\
&= \sup_{\theta\in[0,2\pi]}\left|f(a+\varepsilon e^{i\theta})-f(a)\right|.
\end{aligned}
$$

7.3 Cauchy の積分公式の別証明

(♠) を確認しよう。差の絶対値を評価する。

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{i\theta})d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a)d\theta\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(f(a+\varepsilon e^{i\theta})-f(a)\Big)\,d\theta\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\sup_{\theta\in[0,2\pi]}\left|f(a+\varepsilon e^{i\theta})-f(a)\right|\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \sup_{\theta\in[0,2\pi]}\left|f(a+\varepsilon e^{i\theta})-f(a)\right|.
\end{aligned}
$$

この右辺は、f が a で連続であることから、$\varepsilon\to 0$ のとき 0 に収束する。

残る問題は、

(再掲 4)
$$\int_{|z-c|=R}\frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

を示すことであるが、この積分路の変形には色々なやり方がある。この後 (スライド §7.4) に解説をつけておくので、興味を持った人は読んで見て下さい (時間の関係で動画では説明はしません)。

7.4 Cauchy の積分定理の別証明のための積分路の変形

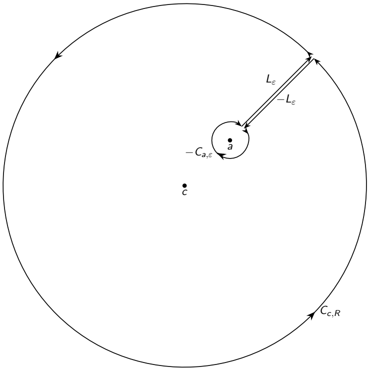
(この項は動画では説明しません。)

$0 < \varepsilon < R - |c - a|$ を満たす任意の ε に対して

(再掲 4)
$$\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

が成り立つ。色々な証明がテキストに載っている。代表的なものを紹介しよう。

7.4.1 証明 1: 往復の橋を渡す



$\overline{D}(a;\varepsilon) \subset D(c;R)$ となるような $\varepsilon > 0$ を 1 つ取る (例えば $\varepsilon := (R - |a-c|)/2$)。
ϕ を $a-c$ の偏角とする。$a - c = |a-c|e^{i\phi}$ が成り立つ。
点 p を中心とする半径 r の円周を一周する曲線を $C_{p,r}$ と表す ($z = p + re^{i\theta}$ ($\theta \in [\phi, \phi+2\pi]$))。$C_{c,R}$ と $C_{a,\varepsilon}$ を用いる。
点 $a + \varepsilon e^{i\phi}$ から $a + (R - |a-c|)e^{i\phi}$ にまっすぐ進む曲線を L_ε と表す。
これらの記号を用いて $C_\varepsilon := C_{c,R} - L_\varepsilon - C_{a,\varepsilon} + L_\varepsilon$ とおく。C_ε は閉曲線である。

7.4.1 証明 1: 往復の橋を渡す

C_ε の周上と囲む範囲では、被積分関数は正則であるから

$$(\sharp) \qquad \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 0.$$

一方、L_ε と $-L_\varepsilon$ に沿う線積分は打ち消し合うので、

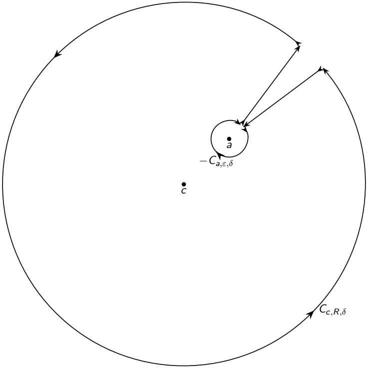
$$\int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_{C_{c,R}} \frac{f(z)}{z-a}dz - \int_{C_{a,\varepsilon}} \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a}dz - \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

ゆえに

$$\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

批判的モードになってみると、この曲線 C_ε は単純閉曲線ではないので、なぜ $(\sharp)$ が成り立つのか、すっきりしないきらいがある (この証明を載せている本では、「単純閉曲線 C の囲む領域と、C の上で f が正則ならば $\int_C f(z)\,dz = 0$」という形の Cauchy の積分定理が書いてあって、それを根拠としているようだが、C_ε は単純閉曲線ではない)。この点を改良した証明を次に紹介する。

7.4.2 証明 2: 開いてから閉じる



上の C_ε は単純閉曲線でなかったが、正の角度 δ 開いた曲線 $C_{\varepsilon,\delta}$ を作る:

$$C_\delta := C_{c,R,\delta} - L_{\varepsilon,\delta} - C_{a,\varepsilon,\delta} + L_{\varepsilon,\delta}.$$

(個々の曲線 $C_{c,R,\delta}$, L_δ, $C_{a,\varepsilon,\delta}$ の定義は書かないが、図を見れば解読出来るであろう。)

7.4.2 証明 2: 開いてから閉じる

この曲線 $C_{\varepsilon,\delta}$ は単純閉曲線であり、

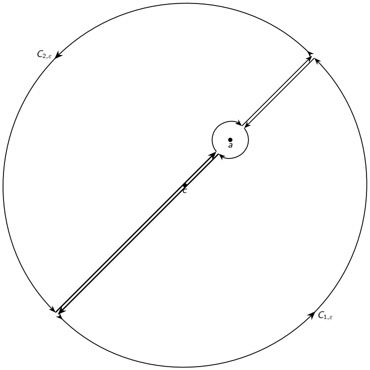
$$\int_{C_{\varepsilon,\delta}} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 0$$

となることは説明しやすい。それから $\delta \to 0$ とすることにより

$$\int_{C_{\varepsilon}} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0$$

が示せるであろう。この後は、前項の証明をたどれば良い。

このような曲線の極限移行をする証明を学生に見せる価値はある、という気もする反面、実際にきちんとやるのは、複素関数を受講している平均的な学生 (2 年生) にとっては難しそうだ。どうも教師の自己満足になってしまいそうで気が引ける。



$C_{1,\varepsilon}$, $C_{2,\varepsilon}$ を図のように定めると、どちらも区分的 C^1 級の閉曲線であり、

$$\int_{C_{1,\varepsilon}} \frac{f(z)}{z-a}dz = 0, \quad \int_{C_{2,\varepsilon}} \frac{f(z)}{z-a}dz = 0$$

が成り立つことは説明しやすい。例えば次のような説明で納得してもらえるのではないだろうか。

7.4.3 証明 3: 2 本の橋を渡して 2 つの閉曲線をつくる

- (a) $C_{j,\varepsilon}$ は単純閉曲線で、$C_{j,\varepsilon}$ 上にも、$C_{j,\varepsilon}$ の囲む領域の内部にも、$\dfrac{f(z)}{z-a}$ が微分可能でない点は存在しない ($j=1,2$)。
- (b) $\dfrac{f(z)}{z-a}$ が正則な領域 $\Omega \setminus \{a\}$ において、$j=1,2$ のそれぞれに対して、星型の部分領域 (例えば円盤領域から 1 つの半径を除いたもの) で $C_{j,\varepsilon}$ を含むものが存在する。そこで星型領域における Cauchy の積分定理を適用する。

そうすると

$$\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a}dz - \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_{C_{1,\varepsilon}+C_{2,\varepsilon}} \frac{f(z)}{z-a}dz = 0+0 = 0.$$

ゆえに

$$\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

(気付いた人も多いと思うが、補題 20.1 に対して前回与えた証明は、この証明をもじったものである。§7.4 で検討するうちでは、この証明がすぐれていると私は思う。)

7.4.4 証明 4: Green の定理を使う

Green の定理を使う、以下のような証明も考えられる。
$0 < \varepsilon < R - |c-a|$ を満たす任意の ε に対して、

$$D := D(c;R) \setminus \overline{D(a;\varepsilon)}$$

とおく。D の境界 ∂D は、二つの円周 $|z-c| = R$, $|z-a| = \varepsilon$ からなる。∂D を正の向きにするには、$|z-a| = \varepsilon$ の方は通常と逆向き (時計回り) にする。

Green の定理 (D を分割して、個々の領域が縦線領域であるように出来るので、難しいバージョンは不要) によって

$$0 = \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

一方

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

であるから

$$\int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,dz. \qquad \square$$

このやり方は見通しが良いが、Cauchy の積分公式を証明する前に f' の連続性が示せていないので、最初から f' が連続という仮定をする必要がありそうである。
関数論のテキストの中には、関数の正則性の仮定に、微分可能性だけでなく、導関数の連続性を要求して、この証明法を採用するものがある。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2020/complex2020.pdf (2014〜).