

複素関数・同演習 第19回

～Cauchyの積分定理(第3回), 円盤におけるCauchyの積分公式(1)～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2020年12月1日

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 Cauchy の積分定理 (続き)
 - 星型領域における Cauchy の積分定理
 - 積分路の変形, 単連結領域における Cauchy の積分定理の証明のあら筋
- 3 円盤における Cauchy の積分公式と正則関数の冪級数展開可能性
 - 円盤における Cauchy の積分公式
- 4 参考文献

本日の内容・連絡事項

- 前回は、星型、単連結という言葉の紹介をした。今回は、星型領域や単連結領域では Cauchy の積分定理が成り立つ、という話をした後、円盤領域における Cauchy の積分公式を紹介する。
- もう秋学期が2/3以上終わったところで、これで間に合うのか？だいじょうぶ。この後は“帝王道路のドライブ¹”をするから。…体感速度が上がるかも知れません。心して下さい。
- 宿題9の解説をします(動画公開は12月1日13:30以降)。
- 宿題10を出します(締め切りは12月8日13:30)。
水曜2限の複素関数演習で公開しますが、課題文自体の置き場所は <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/toi10.pdf> です(直接アクセスできます)。

¹有名な高木貞治という人が、[1]の中で「解析関数の定義が忽然大空から降り来って、忽ちにして虚数積分、忽ちにして留数、忽ちにしてテーロル展開と一呼吸の間に演繹されてしまうような帝王道路のドライブは歴史の歩みではない。」と形容したように、関数論の議論は、線積分の議論がスタートしてからは猛スピードで進んでしまう。

6.5 星型領域における Cauchy の積分定理

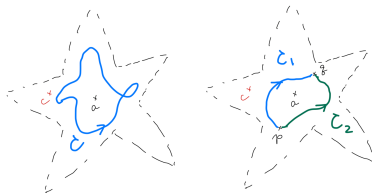
目標は単連結領域における Cauchy の積分定理だけれど、まず星型領域バージョンを証明する。これは単連結領域の場合の証明の基礎にもなる。

定理 19.1 (星型領域における Cauchy の積分定理)

Ω は \mathbb{C} の星型領域 (例えば円盤領域)、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則 (あるいは、ある1点 c を除いた $\Omega \setminus \{c\}$ で正則で、 Ω で連続) とするとき、 f の原始関数が存在する。

ゆえに Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して $\int_C f(z) dz = 0$.

また任意の $p, q \in \Omega$ に対して、 p, q をそれぞれ始点、終点とする Ω 内の任意の区分的 C^1 級曲線 C_1, C_2 に対して、 $\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$ が成り立つ。



6.5 星型領域における Cauchy の積分定理 証明

注意追加 f が微分可能でない点 c の存在を許す場合の証明は後回しにして (系 19.6)、まず f が Ω で正則な場合の証明を行う。

証明 Ω は星型であるから、ある $a \in \Omega$ が存在して、

$$(\forall z \in \Omega) [a, z] \subset \Omega$$

が成り立つ。

$$F(z) := \int_{[a, z]} f(\zeta) d\zeta \quad (z \in \Omega)$$

とおくと、 $F' = f$ が成り立つ。実際、任意の $z_0 \in \Omega$ に対して、ある $\varepsilon > 0$ が存在して、 $D(z_0; \varepsilon) \subset \Omega$. $0 < |h| < \varepsilon$ を満たす任意の $h \in \mathbb{C}$ に対して、 $z_0 + h \in D(z_0; \varepsilon)$. $a, z_0, z_0 + h \in \Omega$ であるが、この3点を頂点とする三角形 δ は $\Delta \subset \Omega$ を満たす。 (\because

$\Delta = \bigcup_{t \in [0, 1]} [a, z_0 + th]$ であるが、 $z_0 + th \in D(z_0; \varepsilon) \subset \Omega$ であるから、 $[a, z_0 + th] \subset \Omega$.

…証明の後に図を示す。)

$\partial\Delta = [a, z_0] + [z_0, z_0 + h] + [z_0 + h, a]$ について、三角形版 Cauchy の積分定理

(Goursat-Pringsheim の定理) から $\int_{\partial\Delta} f(\zeta) d\zeta = 0$. すなわち

$$\int_{[a, z_0]} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z_0, z_0 + h]} f(\zeta) d\zeta - \int_{[a, z_0 + h]} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

6.5 星型領域における Cauchy の積分定理 証明 続き

ゆえに

$$F(z_0 + h) - F(z_0) = \int_{[z_0, z_0+h]} f(\zeta) d\zeta.$$

この後は前回の授業での定理の証明と同様にして $F'(z_0) = f(z_0)$ が示せる。

念のため書いておく:

$$\begin{aligned} \frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} - f(z_0) &= \frac{1}{h} \int_{[z_0, z_0+h]} f(\zeta) d\zeta - f(z_0) \cdot \frac{1}{h} \int_{[z_0, z_0+h]} d\zeta \\ &= \frac{1}{h} \int_{[z_0, z_0+h]} (f(\zeta) - f(z_0)) d\zeta. \end{aligned}$$

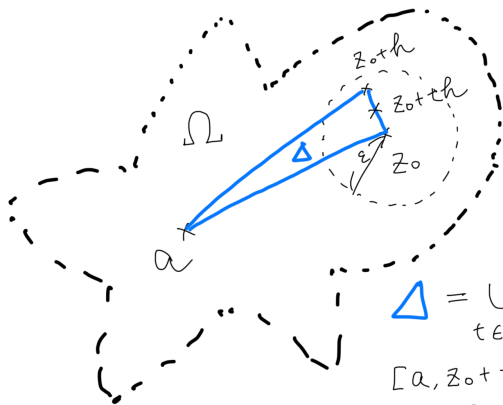
これから $h \rightarrow 0$ のとき

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} - f(z_0) \right| &\leq \max_{\zeta \in [z_0, z_0+h]} |f(\zeta) - f(z_0)| \frac{1}{|h|} \int_{[z_0, z_0+h]} |d\zeta| \\ &= \max_{\zeta \in [z_0, z_0+h]} |f(\zeta) - f(z_0)| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

これは $F'(z_0) = f(z_0)$ であることを示している。

□

6.5 星型領域における Cauchy の積分定理 $\Delta \subset \Omega$



$$\Delta = \bigcup_{t \in [0,1]} [a, z_0 + th]$$

$$[a, z_0 + th] \subset \Omega \text{ for all } t \in [0,1]$$

$$\Delta \subset \Omega$$

6.5 星型領域における Cauchy の積分定理

例 19.2 ($\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ における $\frac{1}{z}$ の原始関数 — Log)

$\Omega := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ は星型領域である (任意の $z \in \Omega$ に対して $[1, z] \subset \Omega$)。また $f(z) := \frac{1}{z}$ は Ω で正則である。ゆえに

$$F(z) := \int_{[1,z]} f(\zeta) d\zeta = \int_{[1,z]} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

とおくと $F'(z) = f(z) = \frac{1}{z}$.

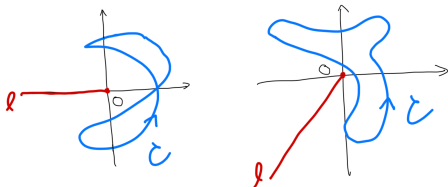
(そうか、この F は $\frac{1}{z}$ の原始関数か…あれ？それは知っていたぞ。)

実は $F(z) = \text{Log } z$ (主値) である。実際 $F'(z) = \frac{1}{z} = (\text{Log } z)'$ であるから、 $(F(z) - \text{Log } z)' = 0$ 。したがって、 $F(z) - \text{Log } z$ は定数関数で、 $z = 1$ で $0 - 0 = 0$ に等しいので、 $F(z) - \text{Log } z = 0$ 。ゆえに

$$(1) \quad \text{Log } z = \int_{[1,z]} \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]). \quad \square$$

6.5 星型領域における Cauchy の積分定理

- 同様に原点を始点とする任意の半直線を l とするとき、 $\mathbb{C} \setminus l$ において $\frac{1}{z}$ の原始関数が存在し、 $\mathbb{C} \setminus l$ 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して
$$\int_C \frac{dz}{z} = 0.$$



- (フライング) 単連結領域における Cauchy の積分定理 (定理 18.1) を用いると、 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ に含まれる任意の単連結領域 Ω において、 $\frac{1}{z}$ の原始関数が存在し、 Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して $\int_C \frac{dz}{z} = 0$ が成り立つ。 □

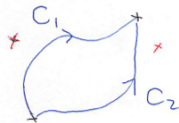
6.6 積分路の変形, 単連結領域における Cauchy の積分定理の証明のあら筋

積分路の変形

f が正則な範囲で曲線 C_1 が曲線 C_2 に変形出来るならば、
$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$

詳しく言うと、次の2つの場合がある。

- Ⓐ 積分路の始点と終点は変えずに (固定して)、被積分関数が正則な範囲で積分路を連続的に変形しても、積分の値は変わらない。
- Ⓑ 積分路が閉曲線の場合は (始点、終点は気にせず)、被積分関数が正則な範囲で積分路を連続的に変形しても、積分の値は変わらない。



⊠ 1:
$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

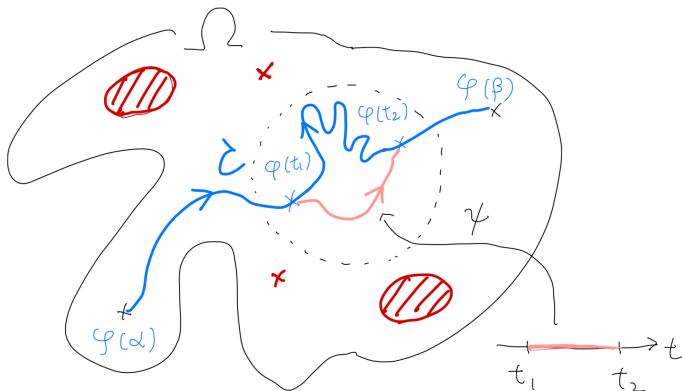


⊠ 2:
$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

6.6 積分路の変形, 単連結領域における Cauchy の積分定理の証明のあら筋

「連続的に変形」を理解して、(b) を認めると、単連結領域における Cauchy の積分定理 (定理 18.1) が得られる。単連結領域では、閉曲線 C は 1 点 (定数曲線 $z = \varphi(t) = c$ ($t \in [\alpha, \beta]$) に連続的に変形できて、定数曲線上の任意の線積分は 0 であるから。詳しい説明 (証明) は、講義ノート [2] の付録 E 節を見よ。

ここでは、次の簡単な事実 (定理にできる) を理解することだけを要求する。(実は、積分路を連続的に変形したときに線積分の値が変わらないことの証明の本質的な部分)。



6.6 積分路の変形, 単連結領域における Cauchy の積分定理の証明のあら筋

赤い点があれば、積分路は工事可能

正則関数の定義域 Ω に含まれる任意の開円盤の中では (円盤の中に赤い点があれば)、積分路の工事が出来る。つまり、 $C: z = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) が、

$$D(c; r) \subset \Omega, \quad t_1, t_2 \in [\alpha, \beta], \quad \varphi([t_1, t_2]) \subset D(c; r)$$

を満たすならば、 $\psi(t_1) = \varphi(t_1)$, $\psi(t_2) = \varphi(t_2)$ を満たす任意の区分的 C^1 級の関数 $\psi: [t_1, t_2] \rightarrow D(c; r)$ に対して、

$$\tilde{\varphi}(t) := \begin{cases} \varphi(t) & (t \in [\alpha, t_1] \cup [t_2, \beta]) \\ \psi(t) & (t \in [t_1, t_2]) \end{cases}$$

とおくと、この $\tilde{\varphi}$ の定める曲線 \tilde{C} について

$$\int_C f(z) dz = \int_{\tilde{C}} f(z) dz$$

が成り立つ。

6.6 積分路の変形, 単連結領域における Cauchy の積分定理の証明のあら筋

証明.

f の定義域 Ω に含まれる任意の円盤領域 $D(c; r)$ は星型領域であるから、その中では積分路を変形しても積分の値は変わらない。実際、 $D(c; r)$ における原始関数を F とするとき、 $\varphi|_{[t_1, t_2]}$ の定める曲線 γ について

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\varphi(t_2)) - F(\varphi(t_1))$$

が成り立つ。 □

この“工事”を続けることで、 Ω 内での積分路の変形がかなり自由に出来るであろう。

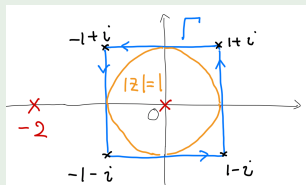
6.6 積分路の変形, 単連結領域における Cauchy の積分定理の証明のあら筋

例 19.3 (ある年度の宿題から)

\mathbb{C} で 4 点 $\pm 1 \pm i$ を頂点とする正方形の周を正の向きに一周する閉曲線を Γ とするとき、

$$(\heartsuit) \quad \int_{\Gamma} \frac{dz}{z(z+2)^2} = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z(z+2)^2}.$$

を示せ (この後、円盤における Cauchy の積分公式から、この積分の値が簡単に求まる)。



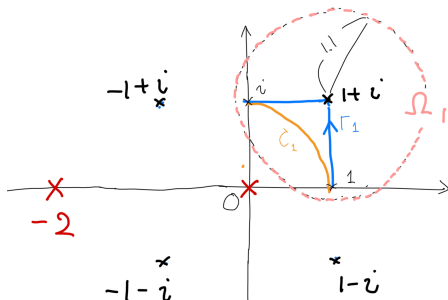
(解答) 大まかに言うと「被積分関数 $\frac{1}{z(z+2)^2}$ は、領域 $\mathbb{C} \setminus \{0, -2\}$ で正則であり、その範囲で積分路 Γ は円周 $|z|=1$ に変形できる」ということである。

積分路変形をどう正当化するか色々なやり方がある。代表的なものを 3 つ示す。

6.6 積分路の変形, 単連結領域における Cauchy の積分定理の証明のあら筋

例 19.3 (つづき)

- ① 星型領域内では、始点と終点が変わらないならば曲線を置き替えて良い、という定理を使って、正方形の周を円周に替えるためには、次の4つの段階を踏めば良い。例えば第1象限の部分は、 $1+i$ を中心として、半径が1.1 (1より大きく、 $1+i$ と0との距離 $\sqrt{2}$ よりは小さい)の円盤領域 (これは星型) Ω_1 を考える。 Ω_1 で被積分関数は正則です (0, -2 は含まないから)。そして、正方形の周 Γ の右上部分 Γ_1 と、円周 C の右上部分 C_1 が Ω_1 に含まれる。ゆえに、 Γ_1 を C_1 に置き換えられる。第2象限 (Γ_2 を C_2)、第3象限 (Γ_3 を C_3)、第4象限 (Γ_4 を C_4)でも同様。



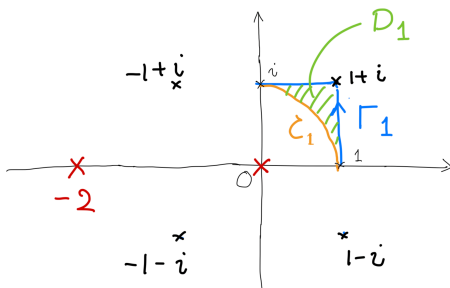
6.6 積分路の変形, 単連結領域における Cauchy の積分定理の証明のあら筋

例 19.3 (つづき)

- ② 各 j に対して、 $\Gamma_j - C_j$ は縦線領域 (D_j とする) を囲むので、縦線領域版の Green の定理を用いて、

$$\int_{\Gamma_j} f(z) dz - \int_{C_j} f(z) dz = \int_{\partial D_j} f(z) dz = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \int_{\Gamma_j} f(z) dz = \int_{C_j} f(z) dz$$

とする手がある。Green の定理をちゃんと分かっているという人には、この方法は簡単に思えるかもしれない。



例 19.3 (つづき)

- ③ 「連続的変形」で説明されることも多い。 $\mathbb{C} \setminus \{0, -2\}$ の中で、正方形の周を円周まで連続的に変形する写像 (ホモトピー写像と呼ぶ) を作る。(この例の場合は簡単。原点に向かって縮める感じ (図 3)。ホモトピー写像があれば、積分路を置き換えられる、という定理は、講義ノートの付録 E.4 節, 定理 E.3。ちょっと背伸び?

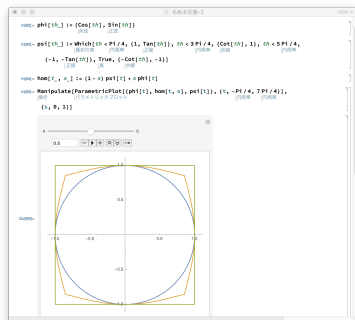


図 3: 正方形の周 Γ を円周 C に連続的に変形する

7 円盤における Cauchy の積分公式と正則関数の幕級数展開可能性

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

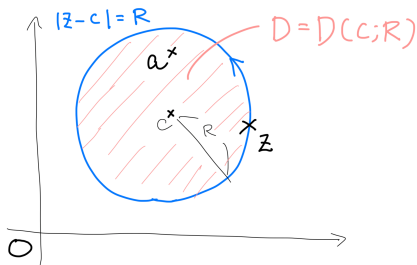
いよいよ主役 **Cauchy の積分公式** の登場である。まずは円盤の場合から。

定理 19.4 (円盤における Cauchy の積分公式)

Ω は \mathbb{C} の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則、 $c \in \Omega$, $R > 0$, $D := D(c; R)$ とおくととき $\bar{D} \subset \Omega$ とする。このとき任意の $a \in D$ に対して

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=R} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

円周上の f の値から円盤内の点での f の値が求まる。



7.1 円盤における Cauchy の積分公式

a を変数と見る場合も多い。そのときは、積分変数 z を ζ に書き換え、 a を z と書き換えて

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-c|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \quad (z \in D)$$

とすると見やすい。この等式の右辺は、何回でも積分記号下の微分が出来る(その事実の証明自体には、 f が正則である必要はなく、 f は連続であればよい)。

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-c|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-c|=R} \left(\frac{d}{dz}\right)^n \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

系 19.5

Ω は \mathbb{C} の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則、 $c \in \Omega$, $R > 0$, $D := D(c; R)$ とおくとき $\bar{D} \subset \Omega$ とする。このとき任意の $z \in D$, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta-c|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta.$$

この定理 19.4 の証明のために補題を 2 つ用意する。

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

補題 19.6 (三角形版 Cauchy の積分定理の一般化)

三角形版 Cauchy の積分定理 (Goursat-Pringsheim) の仮定の条件「 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則」を「 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は連続で、 $(\exists a \in \Omega) f$ は $\Omega \setminus \{a\}$ で正則」と弱くしても $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ が成り立つ。

証明 $a \notin \Delta$ のときは、前と同じ証明で良い。

$a \in \Delta$ とする。以下の3つのうちのいずれかが成り立つ。

- (i) a は Δ のある頂点
- (ii) a は Δ のある辺上にあるが、頂点ではない
- (iii) a は Δ の内部にある。

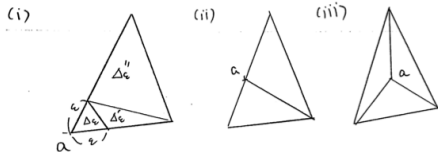


図 4.1 a が三角形 Δ のどこにあるかで場合分け (頂点、頂点でない辺上、内部)

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

(i) の場合、 Δ の辺の長さより小さい任意の正数 ε に対して、図のように Δ を 3 つの三角形に分割する。 a を含まない三角形 $\Delta'_\varepsilon, \Delta''_\varepsilon$ では、周に沿う線積分の値は 0 であるから、

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_\varepsilon} f(z) dz + \int_{\partial\Delta'_\varepsilon} f(z) dz + \int_{\partial\Delta''_\varepsilon} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_\varepsilon} f(z) dz.$$

ゆえに ($\partial\Delta_\varepsilon$ の周の長さが 4ε 以下であることに注意して)

$$\left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right| \leq \int_{\partial\Delta_\varepsilon} |f(z)| |dz| \leq \max_{z \in \Delta} |f(z)| \int_{\partial\Delta_\varepsilon} |dz| \leq 4\varepsilon \max_{z \in \Delta} |f(z)|.$$

$\varepsilon \rightarrow +0$ とすることで $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$.

(ii), (iii) の場合も、図のように三角形を分割すると、各三角形で (i) が適用できて、線積分の値が 0 であることが導かれる。□

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

三角形版 Cauchy の積分定理が一般化されたので、それを用いて証明された星型領域における Cauchy の積分定理も一般化できる。

系 19.7 (星型領域における Cauchy の積分定理の一般化)

星型領域における Cauchy の積分定理の仮定の条件「 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則」を「 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は連続で、 $(\exists a \in \Omega) f$ は $\Omega \setminus \{a\}$ で正則」と弱くしても

$\int_C f(z) dz = 0$ が成り立つ。

証明 もともとの f が正則という仮定は、定理 19.1 の中で、

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta) d\zeta \text{ が、}$$

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(\zeta) d\zeta$$

を満たすことの証明に使った。そこで三角形における Cauchy の積分定理を用いたが、それが微分可能性を仮定しない点 (ただし連続性は仮定) の存在を許せることが分かった。□

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

次を定理 19.4 の証明で用いる。

補題 19.8 (とても重要な線積分)

$a, c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ とするとき

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = \begin{cases} 2\pi i & (|c-a| < r \text{ のとき}) \\ 0 & (|c-a| > r \text{ のとき}). \end{cases}$$

(注意: $|c-a| = r$ とすると、積分路の途中で被積分関数の分母が 0 となるので、その場合は除外しておくことにする。)

この結果は、後で当たり前に思えるようになるが、今証明するのはちょっとした仕事である。まずは、これを使って懸案の定理 19.4 の証明を片付けよう。

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

定理 19.4 の証明

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} & (z \in \Omega \setminus \{a\}) \\ f'(a) & (z = a) \end{cases}$$

とおくと、 $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は連続で、 $\Omega \setminus \{a\}$ で正則である。

十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $D(c; R + \varepsilon) \subset \Omega$. $|z - c| = R$ を C とおくと、 C は $D(c; R + \varepsilon)$ 内の C^1 級の閉曲線である。星型領域における Cauchy の積分定理により

$$0 = \int_C g(z) dz = \int_C \frac{f(z)}{z - a} dz - f(a) \int_C \frac{dz}{z - a}.$$

$\int_C \frac{dz}{z - a} = 2\pi i$ であるから

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - a} dz. \quad \square$$

7.1 円盤における Cauchy の積分公式

補題 19.8 の証明

$|c - a| > r$ のとき。(直観的には赤いバツテンが $|z - c| = r$ の外にあるので積分は 0 である。) $r < R < |c - a|$ を満たす R を取ると、 $\frac{1}{z - a}$ は星型領域

$D(c; R)$ で正則で $|z - c| = r$ はその中にあるので、星型領域における Cauchy の積分定理により

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = 0.$$

$|c - a| < r$ のときの値が $2\pi i$ であることの証明を 2 つ紹介する。

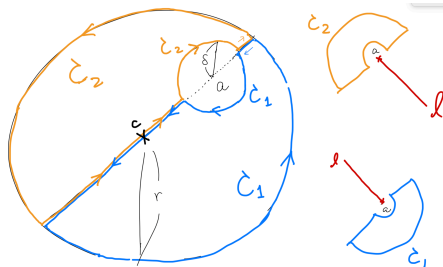
7.1 円盤における Cauchy の積分公式

$|c-a| < r$ の場合の証明 1 — 積分路の変形を用いる 2つの閉曲線 C_1, C_2 を図のように取る。それぞれ a を端点とする半直線の補集合に含まれるので、星型領域における Cauchy の積分定理によって、 $\frac{1}{\zeta-a}$ の積分は 0 である。これから

$$0 = 0 + 0 = \int_{C_1} \frac{dz}{z-a} + \int_{C_2} \frac{dz}{z-a} = \int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} - \int_{|z-a|=\delta} \frac{dz}{z-a}.$$

ゆえに

$$\int_{|z-c|=r} \frac{dz}{z-a} = \int_{|z-a|=\delta} \frac{dz}{z-a} = 2\pi i. \quad \square$$



参考文献

- [1] 高木貞治：近世数学史談及雑談, 共立出版 (1946), 1996年に「近世数学史談・数学雑談復刻版」として復刻されている。また1995年に岩波文庫に「近世数学史談」が入った。
- [2] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2020/complex2020.pdf> (2014~).