

複素関数・同演習 第17回

～Cauchyの積分定理(1)～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2020年11月24日

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 Cauchy の積分定理
 - はじめに
 - 準備
 - 三角形の周に沿う線積分の場合
- 3 参考文献

- Cauchy の積分定理 (講義ノート [1] の §6) の第 1 回。「三角形 Δ を含む開集合で正則な f に対して、 $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ 」という定理を証明する。定理自体も証明も非常に有名で、エッセンスが詰まっている。関数論の山場の一つ。
- 宿題 8 の解説をします (動画公開は 11 月 24 日 13:30 以降)。
- 宿題 9 を出します (締め切りは 12 月 1 日 13:30)。
水曜 2 限の複素関数演習で公開しますが、課題文自体の置き場所は <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/toi9.pdf> です (直接アクセスできます)。

6 Cauchy の積分定理

今日はいよいよ Cauchy の積分定理を説明する。

一般的な形の Cauchy の積分定理をすぐ扱うのは困難である。段階的に進めて行くしかない。今日は Cauchy の積分定理がどういうものか、直観的には分かる形で説明して、三角形の路の場合の定理 (Goursat-Pringsheim) を述べて、きちんと証明する。

6.1 はじめに

Cauchy の積分定理は、結論の式¹は簡単で

$$\int_C f(z) dz = 0$$

というものである。

仮定が問題であるが、普通は次の3つである (他に **Green の定理**を用いて証明するバージョンもあり、それは少し異なる)。

- Ⓐ f は \mathbb{C} の領域 Ω で**正則**。
- Ⓑ C は Ω 内の**閉曲線**。簡単のため区分的に C^1 級としておく。
以上は分かりやすいが、次が要注意
- Ⓒ C の「**囲む**」範囲で f は**正則**。(C の囲む範囲は Ω に含まれる。)

¹余談になるけれど、定理の仮定を言わない人が世の中には結構いる (そんなの定理じゃない、と言いたくなる)。2 次方程式の解の公式とかは、聞けば仮定を答えられる人は多いだろうけれど、少し複雑な定理になると聞いても答えられないんじゃないか? と思われることが時々ある。流体力学のベルヌーイの定理とか、信号処理のシャノンのサンプリング定理とか、有名で良く引き合いに出されるけれど、どうだろう。関数論だとやはり Cauchy の積分定理かな。

6.1 はじめに

再掲

- Ⓐ f は \mathbb{C} の領域 Ω で正則。
- Ⓑ C は Ω 内の閉曲線。簡単のため区分的に C^1 級としておく。
以上は分かりやすいが、次が要注意
- Ⓒ C の「囲む」範囲で f は正則。(C の囲む範囲は Ω に含まれる。)

(a) と (b) だけでは不足で、何か (c) のような条件が必要なことは、

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 \quad (\text{つまり } \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}, f(z) = \frac{1}{z}, C: z = e^{i\theta} (\theta \in [0, 2\pi]))$$

を思い出すと分かる ((a), (b) を満たすのに、 $\int_C f(z) dz = 0$ ではない)。

しかし (c) の「囲む」はあいまいで、定理にするのは一仕事必要である。
 C が円周のような簡単な曲線であれば、直観に従って「囲む」を解釈しても間違いは起こさないが、そうでない場合は微妙なことがある。

6.1 はじめに

ここに書いたことを今理解するのは大変。キーワードを見てもらうくらいか。

C が単純閉曲線 (Jordan 曲線) ならば、**Jordan 曲線定理**により、 C の像 C^* (図形としての曲線) は \mathbb{C} のある有界領域 D の境界であることが分かるので、 C は D を囲むと言っても良いだろうが、Jordan 曲線定理のような大道具(?) はあまり使いたくないし。 C が単純でない場合も考察の対象にしたい、ということもある。

ともあれ、解決の方向は2つある。

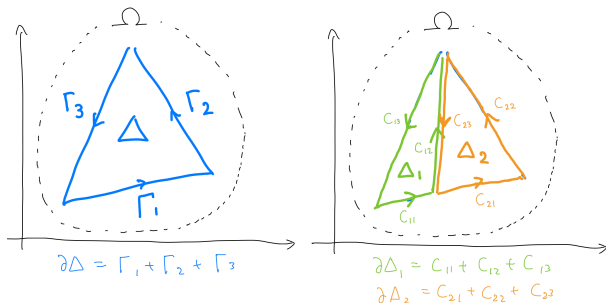
- (i) Ω 自身にまったく穴がない場合だけを考える (そうすれば Ω 内の閉曲線の囲む範囲で正則だろう)。具体的には、後で定義する「**単連結**」という条件を使う。「 Ω が \mathbb{C} の単連結領域であれば、 Ω で正則な任意の関数 f と、 Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して、 $\int_C f(z) dz = 0$ が成り立つ。」という定理を証明できる。
- (ii) 個々の閉曲線 C が1つの点を囲むという条件をうまく定義してからとりかかる。閉曲線の点の周りの**回転数**という概念を使うことになる。それを使って「囲む」を定義する。… この講義ではこれらを説明する時間がない。

いずれにしても単純な場合から話を進めていく。

6.2 準備

Ω は \mathbb{C} の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は連続、 Ω に含まれる三角形 Δ を2つの三角形 Δ_1, Δ_2 に分割するとき、次式が成り立つ。

$$(1) \quad \int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z) dz.$$



実際、

$$\partial\Delta = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3, \quad \partial\Delta_1 = C_{11} + C_{12} + C_{13}, \quad \partial\Delta_2 = C_{21} + C_{22} + C_{23}$$

とするとき $C_{23} = -C_{12}$ であるから

$$\int_{C_{23}} f(z) dz = \int_{-C_{12}} f(z) dz = - \int_{C_{12}} f(z) dz.$$

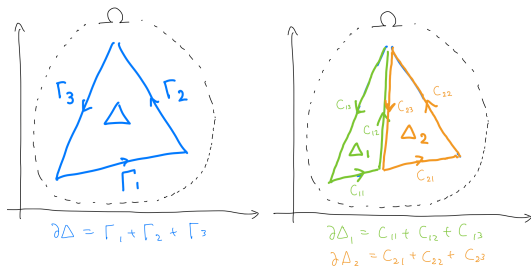
6.2 準備

ゆえに

$$\int_{C_{12}} f(z) dz + \int_{C_{23}} f(z) dz = 0.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z) dz &= \int_{C_{11}} + \int_{C_{12}} + \int_{C_{13}} + \int_{C_{21}} + \int_{C_{22}} + \int_{C_{23}} \\ &= \int_{C_{11}+C_{21}} + \int_{C_{22}} + \int_{C_{13}} \\ &= \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} = \int_{\partial\Delta}. \quad \square \end{aligned}$$



6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

定理 17.1 (三角形版 Cauchy の積分定理, Goursat-Pringsheim [2])

Ω は \mathbb{C} の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則、 Δ は Ω 内の三角形 (周も内部も Ω に含まれる) とするとき

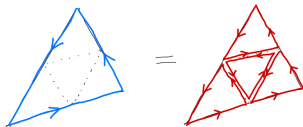
$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0.$$

ここで $\partial\Delta$ は Δ の周を正の向きに一周する閉曲線とする。

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

証明のアイデアは、

- Ⓐ 全体を通して区間縮小法を用いる。ただし2次元区間(長方形)を4つの長方形に分けるのではなく、三角形に対し、各辺の中点を結ぶことで4つの三角形に分割する。



- Ⓑ 正則関数の小さな三角形に沿う線積分は「とても小さい」。三角形が小さいことで周の長さが小さいことに加え、次の理由があるので「とても」小さくなる。

Ⓐ 正則(微分可能)とは、局所的に1次関数 $az + b$ で良く近似できること

Ⓑ 1次関数の閉曲線に沿う線積分は0である: $\int_{\text{閉曲線}} (az + b) dz = 0$.

実際 $\left(\frac{az^2}{2} + bz\right)' = az + b$ であり、1次関数は原始関数を持つので、閉曲線に沿う線積分は0.

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合 証明 (1)

証明 $M := \left| \int_{\partial\Delta} f(z) dz \right|$ とおく。 $M = 0$ を示したい。

$\Delta_0 := \Delta$ とする。 Δ_0 の各辺の中点を結ぶと、4つの三角形に分割される。

$$\Delta_0 = \Delta_{01} \cup \Delta_{02} \cup \Delta_{03} \cup \Delta_{04}.$$

$\partial\Delta_{0j}$ は、 $\partial\Delta_0$ に含まれる線分と、そうでない線分 (両端を除いて Δ_0 の内部に含まれる線分) からなるが、後者は、 $j = 1, 2, 3, 4$ すべてを考えると、2回現れ、それらは互いに逆向きになっているので、線積分を計算するとキャンセルして消えてしまうから、

$$\int_{\partial\Delta_0} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_{01}} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_{02}} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_{03}} f(z) dz + \int_{\partial\Delta_{04}} f(z) dz.$$

ゆえに

$$M = \left| \int_{\partial\Delta_0} f(z) dz \right| \leq \sum_{j=1}^4 \left| \int_{\partial\Delta_{0j}} f(z) dz \right|.$$

右辺の4つの項 $\left| \int_{\partial\Delta_{0j}} f(z) dz \right|$ のうち最大値を与える三角形が Δ_{0j^*} であったとして、それを Δ_1 とおくと、

$$M \leq 4 \left| \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz \right|.$$

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合 証明 (3)

ゆえに

$$\left| \int_{\partial\Delta_1} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4}.$$

以下、同様にして三角形の分割を続ける:

$$\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots$$

このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^n}.$$

区間縮小法の原理により

$$(\exists c \in \mathbb{C}) \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n = \{c\}.$$

$c \in \Delta_0 = \Delta \subset \Omega$ であることに注意する。

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合 証明 (4)

1 次関数は必ず原始関数を持つので、1 次関数の閉曲線に沿う線積分は 0 であるから

$$\int_{\partial\Delta_n} (f(c) + f'(c)(z - c)) dz = 0.$$

ゆえに

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z) dz = \int_{\partial\Delta_n} [f(z) - (f(c) + f'(c)(z - c))] dz.$$

右辺の被積分関数を $g(z)$ とおくと、

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta_n} g(z) dz \right| \leq \max_{z \in \partial\Delta_n^*} |g(z)| \int_{\partial\Delta_n} |dz|.$$

$\int_{\partial\Delta_n} |dz|$ は $\partial\Delta_n$ の弧長である。それを L_n とおくと、 Δ_n は Δ と相似であり、 n が 1 増えるごとに、長さが $1/2$ 倍になるから、 $L_n = \frac{L}{2^n}$ が成り立つ。ただし、 L は $\partial\Delta = \partial\Delta_0$ の弧長である。

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合 証明 (5)

微分の定義 $\lim_{z \rightarrow c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c} = f'(c)$ によって、

$$\lim_{z \rightarrow c} \frac{g(z)}{z - c} = \lim_{z \rightarrow c} \frac{f(z) - (f(c) + f'(c)(z - c))}{z - c} = 0$$

であるから、任意の正の数 ε に対して、ある $\delta > 0$ が存在して、

$$|z - c| < \delta \Rightarrow |g(z)| \leq \varepsilon |z - c|.$$

$c \in \Delta_n$ であるので、十分大きな n に対して、 $\Delta_n \subset D(c; \delta)$ が成り立つ。そのような n に対して、 $z \in \partial\Delta_n^*$ であれば、 $|z - c| < \delta$ であるから

$$\max_{z \in \partial\Delta_n^*} |g(z)| \leq \varepsilon \max_{z \in \partial\Delta_n^*} |z - c| \leq \varepsilon L_n.$$

ゆえに

$$\frac{M}{4^n} \leq \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z) dz \right| \leq \varepsilon L_n \cdot L_n = \frac{\varepsilon L^2}{4^n}$$

であるから、

$$M \leq \varepsilon L^2.$$

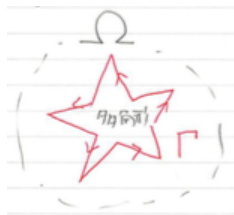
ε は任意の正の数であったので、 $M = 0$.

□

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合 すぐ分かること

定理 17.1 とその証明からすぐに分かること

- ① Ω に含まれる任意の“多角形” P の周 $\Gamma := \partial P$ に沿う線積分 $\int_{\Gamma} f(z) dz$ も 0.



実際、多角形は三角形に分割でき、各三角形の周に沿う線積分は (上の Lemma から) 0. これを全部加えると $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$.

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合 すぐ分かること

- ④ Ω 中にある領域 D の境界が区分的に C^1 級の閉曲線であるとき、 D の中に穴はないとすると $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$.



Figure 1: D 内に穴がない

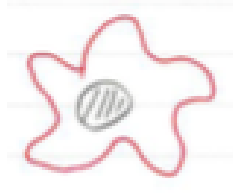


Figure 2: D 内に穴がある

証明もどき

D を細かく分割する。

∂D より離れたところは三角形に出来て、その周に沿う線積分は 0.

∂D に近いとき、 Ω 内のある円盤に含まれるように分割しておけば、 $F(z) :=$

$\int_{[c,z]} f(\zeta) d\zeta$ が原始関数になる。だから線積分は 0.

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

Green の定理による別証明

余談: 有名な別証明 ベクトル解析を学んだ人向け: 有名な定理を用いる別証明がある。

Green の定理

D は \mathbb{R}^2 の良い領域、 Ω は \bar{D} を含む開集合、 $f = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ は C^1 級とするとき

$$\int_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \left(= \int_{\partial D} P dx + Q dy \right) = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy.$$

ただし ∂D は、 D の境界を正の向きにたどる閉曲線である。

これを用いると

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Delta} f(z) dz &= \int_{\partial \Delta} (u + iv)(dx + i dy) = \int_{\partial \Delta} (u dx - v dy) + i \int_{\partial \Delta} (v dx + u dy) \\ &= \iint_{\Delta} (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_{\Delta} (u_x - v_y) dx dy. \end{aligned}$$

f は正則であるから、Cauchy-Riemann の方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つ。ゆえに

$$\int_{\partial \Delta} f(z) dz = \iint_{\Delta} 0 dx dy + i \iint_{\Delta} 0 dx dy = 0. \quad \square$$

上の論法が成立するには、 f' の連続性を仮定する必要がある。強い仮定が必要という意味では、定理としては弱くなるが、Green の定理に十分慣れていれば、魅力的に感じられるかもしれない。

実は教科書 (神保 [3]) はこの証明を採用しているが、残念ながら Green の定理の説明はあまり詳しくない。この方針のもとに書かれている本のうちで、私のお勧めは、堀川 [4] である (Green の定理のていねいな説明が載っている)。

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2020/complex2020.pdf> (2014～).
- [2] Gray, J.: Goursat, Pringsheim, Walsh, and the Cauchy Integral Theorem, *Mathematical Intelligencer*, Vol. 22 (4), pp. 60–77 (2000).
- [3] 神保道夫^{じんぼう}：複素関数入門，現代数学への入門，岩波書店 (2003).
- [4] 堀川穎二^{えいじ}：複素関数論の要諦，日本評論社 (2003/3/10, 2015/8/25).