複素関数・同演習 第17回

～Cauchy の積分定理 (1)～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2020年11月24日

目次

本日の内容・連絡事項

- Cauchy の積分定理 (講義ノート [1] の §6) の第 1 回。「三角形 Δ を含む開集合で正則な f に対して、$\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$」という定理を証明する。定理自体も証明も非常に有名で、エッセンスが詰まっている。関数論の山場の一つ。
- 宿題 8 の解説をします (動画公開は 11 月 24 日 13:30 以降)。
- 宿題 9 を出します (締め切りは 12 月 1 日 13:30)。
水曜 2 限の複素関数演習で公開しますが、課題文自体の置き場所は `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/toi9.pdf` です (直接アクセスできます)。

6 Cauchy の積分定理

今日はいよいよ Cauchy の積分定理を説明する。

一般的な形の Cauchy の積分定理をすぐ扱うのは困難である。段階的に進めて行くしかない。今日は Cauchy の積分定理がどういうものか、直観的には分かる形で説明して、三角形の路の場合の定理 (Goursat-Pringsheim) を述べて、きちんと証明する。

6.1 はじめに

Cauchy の積分定理は、結論の式[1]は簡単で

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

というものである。

[1] 余談になるけれど、定理の仮定を言わない人が世の中には結構いる (そんなの定理じゃない、と言いたくなる)。2 次方程式の解の公式とかは、聞けば仮定を答えられる人は多いだろうけれど、少し複雑な定理になると聞いても答えられないんじゃないか？と思われることが時々ある。流体力学のベルヌーイの定理とか、信号処理のシャノンのサンプリング定理とか、有名で良く引き合いに出されるけれど、どうだろう。関数論だとやはり Cauchy の積分定理かな。

6.1 はじめに

Cauchy の積分定理は、結論の式[1] は簡単で

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

というものである。

仮定が問題であるが、普通は次の 3 つである (他に Green の定理を用いて証明するバージョンもあり、それは少し異なる)。

[1] 余談になるけれど、定理の仮定を言わない人が世の中には結構いる (そんなの定理じゃない、と言いたくなる)。2 次方程式の解の公式とかは、聞けば仮定を答えられる人は多いだろうけれど、少し複雑な定理になると聞いても答えられないんじゃないか？と思われることが時々ある。流体力学のベルヌーイの定理とか、信号処理のシャノンのサンプリング定理とか、有名で良く引き合いに出されるけれど、どうだろう。関数論だとやはり Cauchy の積分定理かな。

6.1 はじめに

Cauchy の積分定理は、結論の式[1] は簡単で

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

というものである。

仮定が問題であるが、普通は次の 3 つである (他に Green の定理を用いて証明するバージョンもあり、それは少し異なる)。

ⓐ f は $\mathbb{C}$ の領域 Ω で正則。

[1] 余談になるけれど、定理の仮定を言わない人が世の中には結構いる (そんなの定理じゃない、と言いたくなる)。2 次方程式の解の公式とかは、聞けば仮定を答えられる人は多いだろうけれど、少し複雑な定理になると聞いても答えられないんじゃないか？と思われることが時々ある。流体力学のベルヌーイの定理とか、信号処理のシャノンのサンプリング定理とか、有名で良く引き合いに出されるけれど、どうだろう。関数論だとやはり Cauchy の積分定理かな。

6.1 はじめに

Cauchy の積分定理は、結論の式[1] は簡単で

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

というものである。

仮定が問題であるが、普通は次の 3 つである (他に Green の定理を用いて証明するバージョンもあり、それは少し異なる)。

(a) f は $\mathbb{C}$ の領域 Ω で正則。

(b) C は Ω 内の閉曲線。簡単のため区分的に C^1 級としておく。

以上は分かりやすいが、次が要注意

[1] 余談になるけれど、定理の仮定を言わない人が世の中には結構いる (そんなの定理じゃない、と言いたくなる)。2 次方程式の解の公式とかは、聞けば仮定を答えられる人は多いだろうけれど、少し複雑な定理になると聞いても答えられないんじゃないか？と思われることが時々ある。流体力学のベルヌーイの定理とか、信号処理のシャノンのサンプリング定理とか、有名で良く引き合いに出されるけれど、どうだろう。関数論だとやはり Cauchy の積分定理かな。

6.1 はじめに

Cauchy の積分定理は、結論の式[1] は簡単で

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

というものである。

仮定が問題であるが、普通は次の 3 つである (他に Green の定理を用いて証明するバージョンもあり、それは少し異なる)。

(a) f は $\mathbb{C}$ の領域 Ω で正則。

(b) C は Ω 内の閉曲線。簡単のため区分的に C^1 級としておく。

以上は分かりやすいが、次が要注意

(c) C の「囲む」範囲で f は正則。(C の囲む範囲は Ω に含まれる。)

[1] 余談になるけれど、定理の仮定を言わない人が世の中には結構いる (そんなの定理じゃない、と言いたくなる)。2 次方程式の解の公式とかは、聞けば仮定を答えられる人は多いだろうけれど、少し複雑な定理になると聞いても答えられないんじゃないか？と思われることが時々ある。流体力学のベルヌーイの定理とか、信号処理のシャノンのサンプリング定理とか、有名で良く引き合いに出されるけれど、どうだろう。関数論だとやはり Cauchy の積分定理かな。

6.1 はじめに

再掲

- ⓐ f は $\mathbb{C}$ の領域 Ω で正則。
- ⓑ C は Ω 内の閉曲線。簡単のため区分的に C^1 級としておく。

  以上は分かりやすいが、次が要注意

- ⓒ C の「囲む」範囲で f は正則。(C の囲む範囲は Ω に含まれる。)

(a) と (b) だけでは不足で、何か (c) のような条件が必要なことは、

$$\int_{|z|=1}\frac{dz}{z}=2\pi i\neq 0\quad \left(\text{つまり } \Omega=\mathbb{C}\setminus\{0\},\ f(z)=\frac{1}{z},\ C\colon z=e^{i\theta}\ (\theta\in[0,2\pi])\right)$$

を思い出すと分かる ((a), (b) を満たすのに、$\int_C f(z)\,dz=0$ ではない)。

6.1 はじめに

再掲

- (a) f は $\mathbb{C}$ の領域 Ω で正則。
- (b) C は Ω 内の閉曲線。簡単のため区分的に C^1 級としておく。

  以上は分かりやすいが、次が要注意
- (c) C の「囲む」範囲で f は正則。(C の囲む範囲は Ω に含まれる。)

(a) と (b) だけでは不足で、何か (c) のような条件が必要なことは、

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0 \quad (\text{つまり } \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\},\ f(z) = \frac{1}{z},\ C\colon z = e^{i\theta}\ (\theta \in [0, 2\pi]))$$

を思い出すと分かる ((a), (b) を満たすのに、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ ではない)。

しかし (c) の「囲む」はあいまいで、定理にするのは一仕事必要である。

6.1 はじめに

再掲

- (a) f は $\mathbb{C}$ の領域 Ω で正則。
- (b) C は Ω 内の閉曲線。簡単のため区分的に C^1 級としておく。

  以上は分かりやすいが、次が要注意

- (c) C の「囲む」範囲で f は正則。(C の囲む範囲は Ω に含まれる。)

(a) と (b) だけでは不足で、何か (c) のような条件が必要なことは、

$$\int_{|z|=1}\frac{dz}{z}=2\pi i\neq 0\quad (\text{つまり } \Omega=\mathbb{C}\setminus\{0\},\ f(z)=\frac{1}{z},\ C\colon z=e^{i\theta}\ (\theta\in[0,2\pi]))$$

を思い出すと分かる ((a), (b) を満たすのに、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz=0$ ではない)。

しかし (c) の「囲む」はあいまいで、定理にするのは一仕事必要である。
C が円周のような簡単な曲線であれば、直観に従って「囲む」を解釈しても間違いは起こさないが、そうでない場合は微妙なことがある。

6.1 はじめに

ここに書いたことを今理解するのは大変。キーワードを見てもらうくらいか。

C が**単純閉曲線** (Jordan 曲線) ならば、**Jordan 曲線定理**により、C の像 C^* (図形としての曲線) は $\mathbb{C}$ のある有界領域 D の境界であることが分かるので、C は D を囲むと言っても良いだろうが、Jordan 曲線定理のような大道具 (?) はあまり使いたくないし。C が単純でない場合も考察の対象にしたい、ということもある。

ともあれ、解決の方向は 2 つある。

(i) **Ω 自身にまったく穴がない場合**だけを考える (そうすれば Ω 内の閉曲線の囲む範囲で正則だろう)。具体的には、後で定義する「**単連結**」という条件を使う。「Ω が $\mathbb{C}$ の単連結領域であれば、Ω で正則な任意の関数 f と、Ω 内の任意の区分的 C^1 級閉曲線 C に対して、$\displaystyle\int_C f(z)\,dz = 0$ が成り立つ。」という定理を証明できる。

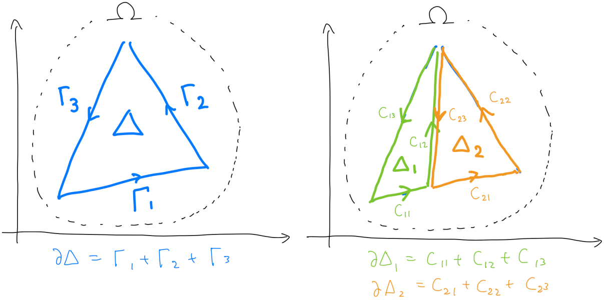
(ii) 個々の閉曲線 C が 1 つの点を囲むという条件をうまく定義してからとりかかる。閉曲線の点の周りの**回転数**という概念を使うことになる。それを使って「囲む」を定義する。⋯ この講義ではこれらを説明する時間がない。

いずれにしても単純な場合から話を進めていく。

6.2 準備

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続、Ω に含まれる三角形 Δ を 2 つの三角形 Δ_1, Δ_2 に分割するとき、次式が成り立つ。

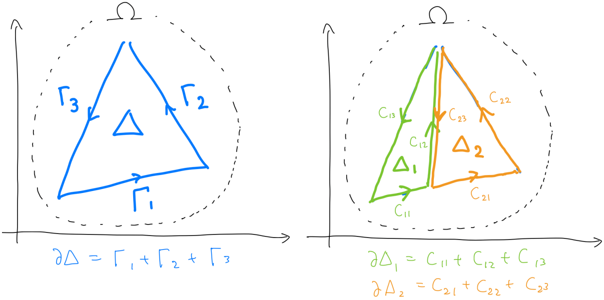
$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz. \tag{1}$$



6.2 準備

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は連続、Ω に含まれる三角形 Δ を 2 つの三角形 Δ_1, Δ_2 に分割するとき、次式が成り立つ。

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz. \tag{1}$$



実際、

$$\partial\Delta = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3, \quad \partial\Delta_1 = C_{11} + C_{12} + C_{13}, \quad \partial\Delta_2 = C_{21} + C_{22} + C_{23}$$

とするとき $C_{23} = -C_{12}$ であるから

$$\int_{C_{23}} f(z)\,dz = \int_{-C_{12}} f(z)\,dz = -\int_{C_{12}} f(z)\,dz.$$

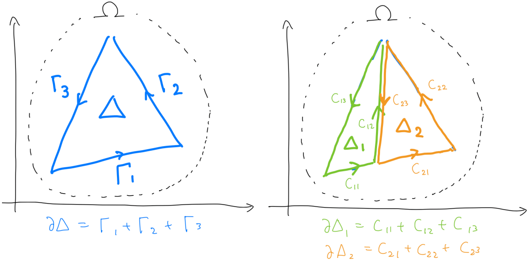
6.2 準備

ゆえに

$$\int_{C_{12}} f(z)\,dz + \int_{C_{23}} f(z)\,dz = 0.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz &= \int_{C_{11}} + {\color{red}\int_{C_{12}}} + \int_{C_{13}} + \int_{C_{21}} + \int_{C_{22}} + {\color{red}\int_{C_{23}}} \\ &= \int_{C_{11}+C_{21}} + \int_{C_{22}} + \int_{C_{13}} \\ &= \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} = \int_{\partial\Delta}. \qquad \square\end{aligned}$$



6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

定理 17.1 (三角形版 Cauchy の積分定理, Goursat-Pringsheim [2])

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則、Δ は Ω 内の三角形 (周も内部も Ω に含まれる) とするとき

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

ここで $\partial\Delta$ は Δ の周を正の向きに一周する閉曲線とする。

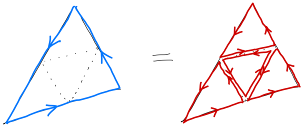
6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

証明のアイディアは、

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

証明のアイディアは、

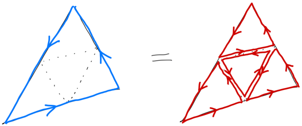
(a) 全体を通して区間縮小法を用いる。ただし 2 次元区間 (長方形) を 4 つの長方形に分けるのではなく、三角形に対し、各辺の中点を結ぶことで 4 つの三角形に分割する。



6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

証明のアイディアは、

(a) 全体を通して区間縮小法を用いる。ただし 2 次元区間 (長方形) を 4 つの長方形に分けるのではなく、三角形に対し、各辺の中点を結ぶことで 4 つの三角形に分割する。

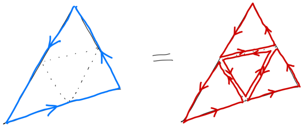


(b) 正則関数の小さな三角形に沿う線積分は「とても小さい」。三角形が小さいことで周の長さが小さいことの他に、次の理由があるので「とても」小さくなる。

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

証明のアイディアは、

(a) 全体を通して区間縮小法を用いる。ただし 2 次元区間 (長方形) を 4 つの長方形に分けるのではなく、三角形に対し、各辺の中点を結ぶことで 4 つの三角形に分割する。

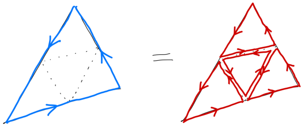


(b) 正則関数の小さな三角形に沿う線積分は「とても小さい」。三角形が小さいことで周の長さが小さいことの他に、次の理由があるので「とても」小さくなる。
   (i) 正則 (微分可能) とは、局所的に 1 次関数 $az + b$ で良く近似できること

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合

証明のアイディアは、

(a) 全体を通して区間縮小法を用いる。ただし 2 次元区間 (長方形) を 4 つの長方形に分けるのではなく、三角形に対し、各辺の中点を結ぶことで 4 つの三角形に分割する。



(b) 正則関数の小さな三角形に沿う線積分は「とても小さい」。三角形が小さいことで周の長さが小さいことの他に、次の理由があるので「とても」小さくなる。

(i) 正則 (微分可能) とは、局所的に 1 次関数 $az+b$ で良く近似できること

(ii) 1 次関数の閉曲線に沿う線積分は 0 である: $\displaystyle\int_{閉曲線}(az+b)dz=0.$

実際 $\left(\frac{az^2}{2}+bz\right)'=az+b$ であり、1 次関数は原始関数を持つので、閉曲線に沿う線積分は 0.

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (1)

証明　$M := \left| \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz \right|$ とおく。$M = 0$ を示したい。

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (1)

証明　$M := \left| \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz \right|$ とおく。$M = 0$ を示したい。

$\Delta_0 := \Delta$ とする。Δ_0 の各辺の中点を結ぶと、4 つの三角形に分割される。

$$\Delta_0 = \Delta_{01} \cup \Delta_{02} \cup \Delta_{03} \cup \Delta_{04}.$$

証明　$M := \left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right|$ とおく。$M = 0$ を示したい。
$\Delta_0 := \Delta$ とする。Δ_0 の各辺の中点を結ぶと、4 つの三角形に分割される。

$$\Delta_0 = \Delta_{01} \cup \Delta_{02} \cup \Delta_{03} \cup \Delta_{04}.$$

$\partial\Delta_{0j}$ は、$\partial\Delta_0$ に含まれる線分と、そうでない線分 (両端を除いて Δ_0 の内部に含まれる線分) からなるが、後者は、$j = 1, 2, 3, 4$ すべてを考えると、2 回現れ、それらは互いに逆向きになっているので、線積分を計算するとキャンセルして消えてしまうから、

$$\int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_{01}} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_{02}} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_{03}} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_{04}} f(z)\,dz.$$

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (1)

証明　$M := \left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right|$ とおく。$M=0$ を示したい。

$\Delta_0 := \Delta$ とする。Δ_0 の各辺の中点を結ぶと、4 つの三角形に分割される。

$$\Delta_0 = \Delta_{01} \cup \Delta_{02} \cup \Delta_{03} \cup \Delta_{04}.$$

$\partial\Delta_{0j}$ は、$\partial\Delta_0$ に含まれる線分と、そうでない線分 (両端を除いて Δ_0 の内部に含まれる線分) からなるが、後者は、$j=1,2,3,4$ すべてを考えると、2 回現れ、それらは互いに逆向きになっているので、線積分を計算するとキャンセルして消えてしまうから、

$$\int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_{01}} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_{02}} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_{03}} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_{04}} f(z)\,dz.$$

ゆえに

$$M = \left|\int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz\right| \le \sum_{j=1}^{4}\left|\int_{\partial\Delta_{0j}} f(z)\,dz\right|.$$

右辺の 4 つの項 $\left|\int_{\partial\Delta_{0j}} f(z)\,dz\right|$ のうち最大値を与える三角形が Δ_{0j^*} であったとして、それを Δ_1 とおくと、

$$M \le 4\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\right|.$$

ゆえに

$$\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\right| \geq \frac{M}{4}.$$

ゆえに

$$\left| \int_{\partial \Delta_1} f(z)\, dz \right| \geq \frac{M}{4}.$$

以下、同様にして三角形の分割を続ける:

$$\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots$$

このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left| \int_{\partial \Delta_n} f(z)\, dz \right| \geq \frac{M}{4^n}.$$

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (3)

ゆえに

$$\left| \int_{\partial \Delta_1} f(z)\, dz \right| \geq \frac{M}{4}.$$

以下、同様にして三角形の分割を続ける:

$$\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots$$

このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left| \int_{\partial \Delta_n} f(z)\, dz \right| \geq \frac{M}{4^n}.$$

区間縮小法の原理により

$$(\exists c \in \mathbb{C}) \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n = \{c\}.$$

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (3)

ゆえに

$$\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\right| \ge \frac{M}{4}.$$

以下、同様にして三角形の分割を続ける:

$$\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots$$

このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \ge \frac{M}{4^n}.$$

区間縮小法の原理により

$$(\exists c \in \mathbb{C}) \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n = \{c\}.$$

$c \in \Delta_0 = \Delta \subset \Omega$ であることに注意する。

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (4)

1 次関数は必ず原始関数を持つので、1 次関数の閉曲線に沿う線積分は 0 であるから

$$\int_{\partial\Delta_n} \left(f(c) + f'(c)(z-c)\right) dz = 0.$$

1 次関数は必ず原始関数を持つので、1 次関数の閉曲線に沿う線積分は 0 であるから

$$\int_{\partial\Delta_n} \bigl(f(c)+f'(c)(z-c)\bigr)\,dz = 0.$$

ゆえに

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_n} \bigl[f(z)-\bigl(f(c)+f'(c)(z-c)\bigr)\bigr]\,dz.$$

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (4)

1 次関数は必ず原始関数を持つので、1 次関数の閉曲線に沿う線積分は 0 であるから

$$\int_{\partial\Delta_n} \left(f(c) + f'(c)(z-c)\right) dz = 0.$$

ゆえに

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_n} \left[f(z) - \left(f(c) + f'(c)(z-c)\right)\right] dz.$$

右辺の被積分関数を $g(z)$ とおくと、

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right| = \left|\int_{\partial\Delta_n} g(z)\, dz\right| \le \max_{z\in\partial\Delta_n^*} |g(z)| \int_{\partial\Delta_n} |dz|.$$

1 次関数は必ず原始関数を持つので、1 次関数の閉曲線に沿う線積分は 0 であるから

$$\int_{\partial\Delta_n} \left(f(c) + f'(c)(z-c)\right) dz = 0.$$

ゆえに

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz = \int_{\partial\Delta_n} \left[f(z) - \left(f(c) + f'(c)(z-c)\right)\right] dz.$$

右辺の被積分関数を $g(z)$ とおくと、

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)dz\right| = \left|\int_{\partial\Delta_n} g(z)\, dz\right| \le \max_{z\in\partial\Delta_n^*} |g(z)| \int_{\partial\Delta_n} |dz|\,.$$

$\displaystyle\int_{\partial\Delta_n} |dz|$ は $\partial\Delta_n$ の弧長である。それを L_n とおくと、Δ_n は Δ と相似であり、n が 1 増えるごとに、長さが 1/2 倍になるから、$L_n = \dfrac{L}{2^n}$ が成り立つ。ただし、L は $\partial\Delta = \partial\Delta_0$ の弧長である。

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (5)

微分の定義 $\lim_{z\to c}\dfrac{f(z)-f(c)}{z-c}=f'(c)$ によって、

$$\lim_{z\to c}\frac{g(z)}{z-c}=\lim_{z\to c}\frac{f(z)-(f(c)+f'(c)(z-c))}{z-c}=0$$

であるから、任意の正の数 ε に対して、ある $\delta>0$ が存在して、

$$|z-c|<\delta \quad\Rightarrow\quad |g(z)|\le\varepsilon\,|z-c|\,.$$

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (5)

微分の定義 $\lim_{z\to c}\dfrac{f(z)-f(c)}{z-c}=f'(c)$ によって、

$$\lim_{z\to c}\frac{g(z)}{z-c}=\lim_{z\to c}\frac{f(z)-(f(c)+f'(c)(z-c))}{z-c}=0$$

であるから、任意の正の数 ε に対して、ある $\delta>0$ が存在して、

$$|z-c|<\delta \quad\Rightarrow\quad |g(z)|\le\varepsilon\,|z-c|\,.$$

$c\in\Delta_n$ であるので、十分大きな n に対して、$\Delta_n\subset D(c;\delta)$ が成り立つ。そのような n に対して、$z\in\partial\Delta_n^*$ であれば、$|z-c|<\delta$ であるから

$$\max_{z\in\partial\Delta_n^*}|g(z)|\le\varepsilon\max_{z\in\partial\Delta_n^*}|z-c|\le\varepsilon L_n.$$

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (5)

微分の定義 $\displaystyle\lim_{z\to c}\frac{f(z)-f(c)}{z-c}=f'(c)$ によって、

$$\lim_{z\to c}\frac{g(z)}{z-c}=\lim_{z\to c}\frac{f(z)-(f(c)+f'(c)(z-c))}{z-c}=0$$

であるから、任意の正の数 ε に対して、ある $\delta>0$ が存在して、

$$|z-c|<\delta \quad\Rightarrow\quad |g(z)|\le\varepsilon\,|z-c|\,.$$

$c\in\Delta_n$ であるので、十分大きな n に対して、$\Delta_n\subset D(c;\delta)$ が成り立つ。そのような n に対して、$z\in\partial\Delta_n^*$ であれば、$|z-c|<\delta$ であるから

$$\max_{z\in\partial\Delta_n^*}|g(z)|\le\varepsilon\max_{z\in\partial\Delta_n^*}|z-c|\le\varepsilon L_n.$$

ゆえに

$$\frac{M}{4^n}\le\left|\int_{\partial\Delta_n}f(z)\,dz\right|\le\varepsilon L_n\cdot L_n=\frac{\varepsilon L^2}{4^n}$$

であるから、

$$M\le\varepsilon L^2.$$

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　証明 (5)

微分の定義 $\lim_{z\to c}\dfrac{f(z)-f(c)}{z-c}=f'(c)$ によって、

$$\lim_{z\to c}\frac{g(z)}{z-c}=\lim_{z\to c}\frac{f(z)-(f(c)+f'(c)(z-c))}{z-c}=0$$

であるから、任意の正の数 ε に対して、ある $\delta>0$ が存在して、

$$|z-c|<\delta \quad\Rightarrow\quad |g(z)|\le\varepsilon\,|z-c|\,.$$

$c\in\Delta_n$ であるので、十分大きな n に対して、$\Delta_n\subset D(c;\delta)$ が成り立つ。そのような n に対して、$z\in\partial\Delta_n^*$ であれば、$|z-c|<\delta$ であるから

$$\max_{z\in\partial\Delta_n^*}|g(z)|\le\varepsilon\max_{z\in\partial\Delta_n^*}|z-c|\le\varepsilon L_n.$$

ゆえに

$$\frac{M}{4^n}\le\left|\int_{\partial\Delta_n}f(z)\,dz\right|\le\varepsilon L_n\cdot L_n=\frac{\varepsilon L^2}{4^n}$$

であるから、

$$M\le\varepsilon L^2.$$

ε は任意の正の数であったので、$M=0$. □

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　すぐ分かること

定理 17.1 とその証明からすぐに分かること

- (a) Ω に含まれる任意の “多角形” P の周 $\Gamma := \partial P$ に沿う線積分 $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz$ も 0.

実際、多角形は三角形に分割でき、各三角形の周に沿う線積分は (上の Lemma から)0. これを全部加えると $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$.

6.3 三角形の周に沿う線積分の場合　すぐ分かること

- (b) Ω の中にある領域 D の境界が区分的に C^1 級の閉曲線であるとき、D の中に穴はないとすると $\displaystyle\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0$.

Figure 1: D 内に穴がない

Figure 2: D 内に穴がある

証明もどき

D を細かく分割する。
∂D より離れたところは三角形に出来て、その周に沿う線積分は 0.
∂D に近いとき。Ω 内のある円盤に含まれるように分割しておけば、$F(z) := \displaystyle\int_{[c,z]} f(\zeta)\,d\zeta$ が原始関数になる。だから線積分は 0.

余談: 有名な別証明　ベクトル解析を学んだ人向け: 有名な定理を用いる別証明がある。

余談: 有名な別証明　ベクトル解析を学んだ人向け: 有名な定理を用いる別証明がある。

Green の定理

D は $\mathbb{R}^2$ の良い領域、Ω は $\overline{D}$ を含む開集合、$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ は C^1 級とするとき

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} \left(= \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy \right) = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy.$$

ただし ∂D は、D の境界を正の向きにたどる閉曲線である。

余談: 有名な別証明　ベクトル解析を学んだ人向け: 有名な定理を用いる別証明がある。

Green の定理

D は $\mathbb{R}^2$ の良い領域、Ω は $\overline{D}$ を含む開集合、$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ は C^1 級とするとき

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} \left(= \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy \right) = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy.$$

ただし ∂D は、D の境界を正の向きにたどる閉曲線である。

これを用いると

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz &= \int_{\partial\Delta} (u+iv)(dx+i\,dy) = \int_{\partial\Delta} (u\,dx - v\,dy) + i\int_{\partial\Delta} (v\,dx + u\,dy) \\ &= \iint_\Delta (-v_x - u_y)dx\,dy + i\iint_\Delta (u_x - v_y)dx\,dy. \end{aligned}$$

余談: 有名な別証明　ベクトル解析を学んだ人向け: 有名な定理を用いる別証明がある。

Green の定理

D は $\mathbb{R}^2$ の良い領域、Ω は $\overline{D}$ を含む開集合、$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ は C^1 級とするとき

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} \left(= \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy \right) = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy.$$

ただし ∂D は、D の境界を正の向きにたどる閉曲線である。

これを用いると

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz &= \int_{\partial\Delta} (u+iv)(dx+i\,dy) = \int_{\partial\Delta} (u\,dx - v\,dy) + i\int_{\partial\Delta} (v\,dx + u\,dy) \\ &= \iint_\Delta (-v_x - u_y)dx\,dy + i\iint_\Delta (u_x - v_y)dx\,dy.\end{aligned}$$

f は正則であるから、Cauchy-Riemann の方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つ。

余談: 有名な別証明　ベクトル解析を学んだ人向け: 有名な定理を用いる別証明がある。

Green の定理

D は $\mathbb{R}^2$ の良い領域、Ω は $\overline{D}$ を含む開集合、$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ は C^1 級とするとき

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} \left(= \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy \right) = \iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy.$$

ただし ∂D は、D の境界を正の向きにたどる閉曲線である。

これを用いると

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz &= \int_{\partial\Delta} (u+iv)(dx+i\,dy) = \int_{\partial\Delta} (u\,dx - v\,dy) + i\int_{\partial\Delta} (v\,dx + u\,dy) \\ &= \iint_\Delta (-v_x - u_y)dx\,dy + i\iint_\Delta (u_x - v_y)dx\,dy.\end{aligned}$$

f は正則であるから、Cauchy-Riemann の方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つ。ゆえに

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \iint_\Delta 0\,dx\,dy + i\iint_\Delta 0\,dx\,dy = 0. \quad \square$$

上の論法が成立するには、f' の連続性を仮定する必要がある。強い仮定が必要という意味では、定理としては弱くなるが、Green の定理に十分慣れていれば、魅力的に感じられるかもしれない。

実は教科書 (神保 [3]) はこの証明を採用しているが、残念ながら Green の定理の説明はあまり詳しくない。この方針のもとに書かれている本のうちで、私のお勧めは、堀川 [4] である (Green の定理のていねいな説明が載っている)。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. `http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2020/complex2020.pdf` (2014〜).

[2] Gray, J.: Goursat, Pringsheim, Walsh, and the Cauchy Integral Theorem, *Mathematical Intelligencer*, Vol. 22 (4), pp. 60–77 (2000).

[3] 神保(じんぼう)道夫：複素関数入門, 現代数学への入門, 岩波書店 (2003).

[4] 堀川穎二(えいじ)：複素関数論の要諦, 日本評論社 (2003/3/10, 2015/8/25).