

# 複素関数・同演習 第16回

## ～線積分(2)～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

2020年11月18日

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 線積分 (続き)
  - 線積分の定義 (続き)
  - 線積分に関する用語の定義
  - 線積分の性質
- 3 参考文献

- 前回に引き続き、複素線積分  $\int_C f(z) dz$  の性質を説明する (講義ノート [1] の §5)。  
次回予告: いよいよ Cauchy の積分定理の説明を始める。
- 宿題 8 を出します (締め切りは 11 月 24 日 13:30)。

## 5.1 線積分の定義 (続き)

なぜ線積分が重要か。

複素関数においては、それこそが微分の逆演算と考えることができるものだからである。

### 定理 16.1 (微積分の基本定理、のようなもの)

$\Omega$  は  $\mathbb{C}$  の開集合,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は連続で原始関数  $F$  を持つ ( $F' = f$ )、 $C$  は  $\Omega$  内の区分的  $C^1$  級曲線とすると、

$$(1) \quad \int_C f(z) dz = F(b) - F(a).$$

が成り立つ。ただし、 $a, b$  はそれぞれ  $C$  の始点、終点である。

((1) の右辺を、 $[F(z)]_a^b$  や  $[F(z)]_{z=a}^{z=b}$  で表す。)

## 5.1 線積分の定義 (続き)

**証明**  $C$  が  $z = \varphi(t)$  ( $t \in [\alpha, \beta]$ ) と表せて、 $\varphi$  が  $C^1$  級である場合、

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= \int_C F'(z) dz = \int_\alpha^\beta F'(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt} F(\varphi(t)) dt \\ &= [F(\varphi(t))]_{t=\alpha}^{t=\beta} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

$\varphi$  が連続かつ区分的  $C^1$  級の場合、ある  $\{t_j\}_{j=0}^m$  が存在して

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta, \quad \varphi \text{ は各 } [t_{j-1}, t_j] \text{ で } C^1 \text{ 級.}$$

このとき

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} F'(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \sum_{j=1}^m (F(\varphi(t_j)) - F(\varphi(t_{j-1}))) \\ &= F(\varphi(t_m)) - F(\varphi(t_0)) = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

(本当はいつもこのように積分範囲を分割して議論すべきだけど、ワンパターンの議論なので、以下では、 $\varphi$  が  $C^1$  級のときの証明だけを書いて済ませることが多い。) □

## 5.1 線積分の定義 (続き)

上の定理は、1変数実関数の場合とある意味では同じである。しかし、

連続な1変数実関数は必ず原始関数を持つ。

$$(\because F(x) := \int_a^x f(t) dt \text{ とおくと } F'(x) = f(x))$$

は成り立つが、

連続な1変数複素関数は原始関数を持つとは限らない。

ゆえに原始関数が存在することは、仮定として与える必要がある。

(このあたりの事情は、ベクトル解析でも同じである。任意のベクトル場  $\mathbf{f}$  に対して、 $\mathbf{f}$  のポテンシャル ( $\nabla F = \mathbf{f}$  を満たす  $F$  のこと) が存在するとは限らない。もし存在すれば、 $\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = F(\mathbf{b}) - F(\mathbf{a})$ .)

## 5.1 線積分の定義 (続き)

前回最後の2つの例を見直してみる。

### 例 16.2 (原始関数が存在すれば楽々計算 例 15.4 再訪)

$f(z) = z^2$ ,  $C: z = e^{i\theta}$  ( $\theta \in [0, \pi]$ ) とする。 $F(z) := \frac{z^3}{3}$  は  $F' = f$  を満たす。ゆえに

$$\int_C f(z) dz = \left[ \frac{z^3}{3} \right]_{z=1}^{z=-1} = \frac{(-1)^3 - 1^3}{3} = -\frac{2}{3} \quad (\text{もちろん前の計算と一致}).$$

### 例 16.3 (原始関数が存在しない例 例 15.5 再訪)

(前半)  $f(z) = \frac{1}{z}$  ( $z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ) とする。 $f$  の原始関数は存在しない。実際、もしも原始関数  $F$  が存在すると仮定すると、 $C: z = e^{i\theta}$  ( $\theta \in [0, 2\pi]$ ) は  $\Omega$  内の  $C^1$  級曲線であるから

$$\int_C f(z) dz = [F(z)]_{z=1}^{z=1} = F(1) - F(1) = 0.$$

ところが前回見たように  $\int_C f(z) dz = 2\pi i$  であるから、矛盾が生じる。

## 5.1 線積分の定義 (続き)

そういうわけで、原始関数が存在するかどうかが大変である。

- 多項式の場合は、必ず存在する。
- 収束冪級数の場合は、必ず存在する。
- 有理関数の場合は  $\log$  が出るケースがある。その場合は存在しないかもしれない。要注意。
- $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ ,  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\operatorname{Arg} z$  は原始関数を持たない。



## 5.1 線積分の定義 (続き)

### 例 16.3 (原始関数が存在しない例 (つづき)) 例 15.5 再訪

(後半)  $\Omega' := \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$  における対数関数の分枝  $\log z$  を、 $z = re^{i\theta}$  ( $r > 0$ ,  $\theta \in (0, 2\pi)$ ) に対して

$$\log z := \log r + i\theta$$

と定める。 $F(z) := \log z$  は  $\Omega'$  で正則であり、 $F'(z) = \frac{1}{z}$ .

$0 < \varepsilon < \pi$  を満たす  $\varepsilon$  に対して

$$C_\varepsilon: z = e^{i\theta} \quad (\varepsilon \leq \theta \leq 2\pi - \varepsilon)$$

とおく。 $C_\varepsilon$  は  $\Omega'$  内の  $C^1$  級曲線で

$$\begin{aligned} \int_{C_\varepsilon} f(z) dz &= [F(z)]_{z=e^{i\varepsilon}}^{z=e^{i(2\pi-\varepsilon)}} = \log e^{i(2\pi-\varepsilon)} - \log e^{i\varepsilon} \\ &= (2\pi - \varepsilon)i - i\varepsilon = 2(\pi - \varepsilon)i. \end{aligned}$$

$\varepsilon \rightarrow +0$  のときの極限  $2\pi i$  が、 $\int_C f(z) dz = 2\pi i$  に一致するのはもっともら

## 5.1 線積分の定義 (続き)

原始関数が存在しない場合は、例えば例 15.4, 15.5 でやったように、定義に戻って計算すると良い。

### 例 16.4 (原始関数の存在しない例)

$C: z = (1 + 2i)t$  ( $t \in [0, 1]$ ) とする。 $f(z) = |z|$  は原始関数を持たない。

$$\begin{aligned}\int_C |z| dz &= \int_0^1 \sqrt{t^2 + (2t)^2} \cdot (1 + 2i) dt = (1 + 2i)\sqrt{5} \int_0^1 |t| dt \\ &= (1 + 2i)\sqrt{5} \int_0^1 t dt = \frac{(1 + 2i)\sqrt{5}}{2}. \quad \square\end{aligned}$$

## 5.2 線積分に関する用語の定義

**曲線のいろは**  $\Omega$  は  $\mathbb{C}$  の開集合,  $C: z = \varphi(t)$  ( $t \in [\alpha, \beta]$ ) は  $\Omega$  内の曲線 (i.e.  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$  連続) とする。

- ①  $\varphi([\alpha, \beta]) = \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$  を  **$C$  の像** または **跡** と呼び、 $C^*$  と表す。
- ②  $C$  が  **$C^1$  級** とは、 $\varphi$  が  $C^1$  級 (つまり  $\varphi$  が微分可能で、 $\varphi'$  が連続) であることをいう。
- ③  $C$  が  **$C^1$  級正則** とは、 $C$  が  $C^1$  級かつ  $(\forall t \in [\alpha, \beta]) \varphi'(t) \neq 0$  であることをいう。(  $C^*$  はなめらかで、尖ったりしないし、いきなりバックしたりもしない。 )

- ④  $C$  が **区分的  $C^1$  級** とは、ある  $\{t_j\}_{j=1}^m$  が存在して、

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta,$$

かつ各  $[t_{j-1}, t_j]$  で  $\varphi$  は  $C^1$  級であることをいう。

- ⑤  $C$  が **区分的  $C^1$  級正則** とは、ある  $\{t_j\}_{j=1}^m$  が存在して、

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = \beta,$$

かつ各  $[t_{j-1}, t_j]$  で  $\varphi$  は  $C^1$  級かつ  $\varphi'(t) \neq 0$  (ただし  $t = t_{j-1}, t_j$  では片側微分係数である。 ) であることをいう。

## 5.2 線積分に関する用語の定義

- ⑥  $C$  が**閉曲線**とは、 $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ であることをいう。
- ⑦  $C$  が**単純** (Jordan arc)  $\Leftrightarrow$  閉曲線でないときは  $\varphi$  が単射、閉曲線であるときは  $[\alpha, \beta]$  で単射であることをいう。  
要するに「自分自身と交わらない」こと。
- ⑧ 区分的  $C^1$  級単純正則閉曲線が**正の向き**  $\Leftrightarrow$  進行方向の左手に  $C$  が囲む領域が見える。

実は **Jordan 曲線定理** 「平面内の任意の単純閉曲線は、平面を2つの領域(一方は有界、もう一方は非有界)にわけ、曲線の像は両者の境界である。」証明が大変なので、この定理はこの講義では使わない。

### 例 16.5 (円周)

$C: z = c + re^{i\theta}$  ( $\theta \in [0, 2\pi]$ ) は、 $C^1$  級正則単純閉曲線である。 $C$  の像は中心  $c$ 、半径が  $r$  の円周で、 $C$  は正の向きである。単に  $|z - c| = r$  と書いたら、この曲線のこととみなす(慣習)。

## 5.2 線積分に関する用語の定義

### 例 16.6 (正方形の周)

図の正方形の周。

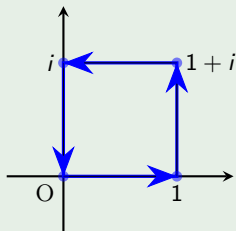


図 1: 正方形の周を正の向きに一周する

$$C: z = \varphi(t) := \begin{cases} t & (t \in [0, 1]) \\ 1 + i(t-1) & (t \in [1, 2]) \\ 1 + i - (t-2) & (t \in [2, 3]) \\ i - i(t-3) & (t \in [3, 4]) \end{cases}$$

$C^*$  = 正方形の周. 区分的に  $C^1$  級正則、単純閉曲線、正の向き。  
しかし!! 計算をするときに上の式は使わない (もっと楽な方法がある)。

□

## 5.2 線積分に関する用語の定義

### 定義 16.7 (逆向きの曲線 $-C$ , 曲線の和 $C_1 + C_2$ )

- ① 逆向きの曲線  $-C: z = \varphi(-t)$  ( $t \in [-\beta, -\alpha]$ )
- ②  $C_1$  の終点 =  $C_2$  の始点のとき。  $C_1 + C_2$  を次のように定義する。

$$\varphi(t) := \begin{cases} \varphi_1(t) & t \in [\alpha_1, \beta_1] \\ \varphi_2(t - \beta_1 + \alpha_2) & t \in [\beta_1, \beta_1 + \beta_2 - \alpha_2] \end{cases}$$

教科書は  $C_2 C_1$  と表している。これはもっともなところがあるのだけれど…この講義では  $C_1 + C_2$  と表す (その方がふつう)。後で終点 = 始点でない場合にも使う。

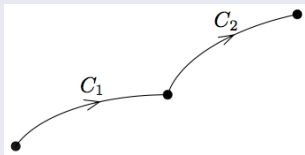


図 2:  $C_1$  の終点 =  $C_2$  の始点ならば  $C_1 + C_2$  が作れる

## 5.3 線積分の性質

### 定理 16.8 (線積分の性質)

$\Omega$  は  $\mathbb{C}$  の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  は連続、 $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $C, C_1, C_2$  は  $\Omega$  内の区分的に  $C^1$  級の曲線とする。このとき次が成り立つ。

- ① 
$$\int_C (f(z) + g(z)) dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz.$$
- ② 
$$\int_C \lambda f(z) dz = \lambda \int_C f(z) dz.$$
- ③ 
$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| \quad (\text{前回説明済みであるが}).$$
- ④ 
$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz.$$
- ⑤ 
$$\int_{C_1+C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz.$$

## 5.3 線積分の性質

証明 (1), (2) は簡単なので省略する。(5) は演習問題とする。

③ 一般に連続関数  $F: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  に対して、

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |F(t)| dt$$

が成り立つことを認めれば、 $F(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$  について適用して、

$$\left| \int_C f(z) dz \right| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(\varphi(t))\varphi'(t)| dt = \int_C |f(z)| |dz|.$$

④  $z = \varphi(-t)$  ( $t \in [-\beta, -\alpha]$ ) とすると、 $dz = -\varphi'(-t)dt$  であるから、

$$\int_{-C} f(z) dz = \int_{-\beta}^{-\alpha} f(\varphi(-t)) \cdot (-\varphi'(-t)) dt = \int_{-\alpha}^{-\beta} f(\varphi(-t))\varphi'(-t) dt.$$

$s = -t$  とおくと、 $t = -\alpha$  のとき  $s = \alpha$ 、 $t = -\beta$  のとき  $s = \beta$ 、 $dt = -ds$  であるから、

$$\int_{-C} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(s))\varphi'(s) \cdot (-1) ds = - \int_C f(z) dz. \quad \square$$



## 5.3 線積分の性質

### 注意 16.9

弧長要素に関する線積分  $\int_C f(z) |dz| = \int_C f ds$  についても (1), (2) は成立する。(3), (4) については若干の注意が必要である。例えば

$$\int_{-C} f(z) |dz| = \int_C f(z) |dz|. \quad \square$$

### 定理 16.10

線積分の値は、曲線の向きを変えないパラメーター付けによらない。

### 証明.

一般の場合の証明を書くことはサボるが、次の例を検討すると理解できよう。 □

## 5.3 線積分の性質

### 例 16.11

次の5つの曲線について考える。

$$C_1: z = e^{i\theta} \quad (\theta \in [0, \pi])$$

$$C_2: z = e^{i\pi t} \quad (t \in [0, 1])$$

$$C_3: z = e^{i\pi t^2} \quad (t \in [0, 1])$$

$$C_4: z = -t + i\sqrt{1-t^2} \quad (t \in [-1, 1])$$

$$C_5: z = t + i\sqrt{1-t^2} \quad (t \in [-1, 1])$$

曲線の像はいずれも、原点を中心とする単位円周の上半分である：

$$C_j^* = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\} \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5).$$

$j = 1, \dots, 4$  に対して  $C_j$  の向きは同じ、 $C_5 = -C_4$  であるので  $C_5$  は逆向きである。

上の定理を認めると、任意の  $f$  に対して  $\int_{C_j} f(z) dz$  の値は皆同じであり、

$$\int_{C_5} f(z) dz = - \int_{C_4} f(z) dz \quad \text{であることが分かる。}$$

## 5.3 線積分の性質

### 例 16.11 (続き)

この例については、直接的な変数変換で示すことができる。

$$(2) \quad \int_{C_1} f(z) dz = \int_0^\pi f(e^{i\theta}) \cdot ie^{i\theta} d\theta.$$

(2) で、 $\theta = \pi t$  と変数変換すると

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_0^1 f(e^{i\pi t}) \cdot ie^{i\pi t} \cdot \pi dt = \int_0^1 f(e^{i\pi t}) \cdot i\pi e^{i\pi t} dt = \int_{C_2} f(z) dz.$$

(2) で、 $\theta = \pi t^2$  と変数変換すると

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_0^1 f(e^{i\pi t^2}) \cdot ie^{i\pi t^2} \cdot \pi 2t dt = \int_0^1 f(e^{i\pi t^2}) \cdot 2\pi ie^{i\pi t^2} dt = \int_{C_3} f(z) dz.$$

以下同様に証明できる。

問  $\int_{C_4} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz$  であることを示せ。

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2020/complex2020.pdf> (2014～).