

複素関数・同演習 第15回

～対数関数と冪関数 (3), 線積分～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2020年11月17日

目次

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 対数関数と冪関数
 - 複素対数関数
 - 冪関数 (power function) z^α
 - 初等関数ワールド
- 3 線積分
 - 線積分の定義
- 4 参考文献

- 前回定義した複素対数関数を用いて、複素冪関数や複素逆三角関数の定義を述べる。複素線積分の定義を述べる (講義ノート [1] の §4 を終えて、§5 に入る)。
- 宿題 7 の解説をします (動画公開は 11 月 17 日 13:30 以降)。
- 宿題 8 を出します (締め切りは 11 月 24 日 13:30)。

4.2 冪関数 (power function) z^α

まず、高校数学の復習から始めよう。

実数 a, b について、 a^b がつねに定義されるわけではなかった。 $a < 0$ かつ $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ のときは a^b を考えないのが普通である。

「そうだったっけ?」「 $(-1)^\pi$ の値は?」これは答えに詰まるのが正しい。定義されていない。

$a > 0$ のときは、次式が成り立つ。

$$(1) \quad a^b = e^{b \log a}.$$

この関係 (1) を用いて、冪関数を複素関数に拡張する。

4.2 冪関数 (power function) z^α

後で冪関数を z^α と書くことになるが、しばらく $p(z, \alpha)$ と書くことにする。

$$(2) \quad p(z, \alpha) := e^{\alpha \log z}.$$

この \log として、 \log (無限多価), \log (分枝), Log (主値) など色々考えられる。

しばらく多価関数の

$$\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z}; \text{ただし } z = re^{i\theta}, r > 0, \theta \in \mathbb{R} \text{ とする})$$

を使う (可能な値をすべて考える)。

$$p(z, \alpha) = e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\log r + i(\theta + 2n\pi))} = r^\alpha e^{i\alpha\theta} e^{2\pi i n \alpha}.$$

簡単のため、まず $\alpha \in \mathbb{R}$ のときを考える。このとき

$$(3) \quad |p(z, \alpha)| = r^\alpha \quad \text{すなわち} \quad (|z^\alpha| = |z|^\alpha).$$

α で場合分けする (整数、整数でない有理数、無理数)。

Ⓐ $\alpha \in \mathbb{Z}$ のとき、 $n\alpha \in \mathbb{Z}$. ゆえに $e^{2\pi i n \alpha} = 1$. ゆえに

$$p(z, \alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} = r^\alpha (e^{i\theta})^\alpha = (re^{i\theta})^\alpha = z^\alpha = \begin{cases} \overbrace{z \times \cdots \times z}^{\alpha \text{ 個}} & (\alpha > 0) \\ 1 & (\alpha = 0) \\ \underbrace{1/(z \times \cdots \times z)}_{-\alpha \text{ 個}} & (\alpha < 0) \end{cases}$$

4.2 冪関数 (power function) z^α

ⓑ $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ のとき

$$(4a) \quad \alpha = \frac{q}{p} \quad (p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z}, p \text{ と } q \text{ は互いに素})$$

とすると

$$p(z, \alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} e^{2\pi i \frac{nq}{p}} = r^\alpha e^{i\alpha\theta} \omega^{nq} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

ただし

$$\omega := e^{2\pi i/p}.$$

n が \mathbb{Z} を動くとき、 nq を p で割った余りには、 $0, 1, \dots, p-1$ すべて現れる¹。ゆえに

$$\omega^{nq} = 1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{p-1},$$

$$(4b) \quad p(z, \alpha) = r^\alpha e^{i\alpha\theta} \omega^k \quad (k = 0, 1, \dots, p-1).$$

これは円周 $|z| = r^\alpha$ の p 等分点である。特に $\alpha = \frac{1}{p}$ のときは、 z の p 乗根全体である。

¹実際、 p と q は互いに素であるから、 $(\exists k, \ell \in \mathbb{Z}) kp + \ell q = 1$ 。ゆえに任意の $m \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ に対して、 $mkp + m\ell q = m$ 。ゆえに $(m\ell)q$ を p で割った余りは m 。 $n := m\ell$ とおくと $\omega^{nq} = \omega^{m\ell q} = \omega^{-mkp} \omega^m = \omega^m$ 。

4.2 冪関数 (power function) z^α

- Ⓒ $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (つまり α は無理数) のとき、 $p(z, \alpha)$ は無限個の値を持つ (証明はサボる。コンピューターで計算して納得できる…かも)。□

まとめると

- Ⓐ $\alpha \in \mathbb{Z}$ のとき、 $p(z, \alpha) = z^\alpha$ (普通の冪). 1 価関数である。
- Ⓑ $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $\alpha = \frac{q}{p}$ (既約分数, $p \in \mathbb{N}$) のとき、 $p(z, \alpha)$ は p 価関数である。
- Ⓒ $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ のとき、 $p(z, \alpha)$ は無限多価関数である。

もちろん、いずれの場合も、 $p(z, \alpha) = e^{\alpha \log z}$ の \log の分枝を選ぶことで、1 価関数になる (分枝が選べる)。

今後は $p(z, \alpha)$ を z^α と書く。特に $\alpha = \frac{1}{p}$ ($p \in \mathbb{N}$) のとき $\sqrt[p]{z}$ と書くことがある。多価関数と考えるのか、分枝を選んで一価関数と考えるかは case by case である。

4.2 冪関数 (power function) z^α

例 15.1 ($\sqrt{-1}$ は何か?)

$(-1) = 1 \cdot e^{\pi i}$ より $\log(-1) = \log 1 + i(\pi + 2n\pi) = (2n+1)\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$) であるから、

$$\sqrt{-1} = (-1)^{1/2} = e^{\frac{1}{2} \log(-1)} = e^{\frac{1}{2}(2n+1)\pi i} = e^{(n+\frac{1}{2})\pi i} = i(-1)^n = \pm i.$$

(別法) $\alpha = \frac{1}{2}$, $z = -1$ とすると、 $z = 1 \cdot e^{\pi i}$, $\omega = e^{2\pi i/2} = e^{\pi i} = -1$ であるから、

$$\sqrt{-1} = z^{1/2} = 1^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \cdot \pi i} \cdot \omega^k = i \cdot (-1)^k \quad (k = 0, 1)$$

ゆえに

$$\sqrt{-1} = \pm i.$$

4.2 冪関数 (power function) z^α

1つくらい $\alpha \notin \mathbb{R}$ に対する z^α を求めてみよう。

例 15.2 (i の i 乗)

多分応用はないと思うが、 i^i を求めてみよう。 i の極形式は $i = 1 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$ であるから

$$\log i = \log |1| + i \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right) = \left(2n + \frac{1}{2} \right) \pi i \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

ゆえに ($a^b = e^{b \log a}$ によって)

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i \cdot (2n + \frac{1}{2}) \pi i} = e^{-(2n + \frac{1}{2}) \pi} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

4.2 冪関数 (power function) z^α おまけ

$p(z, \alpha)$ を図示する Mathematica プログラム

```
p[z_, alpha_, maxn_] := Module[{r, t, w},
  r = Abs[z]; t = Arg[z]; w = r^alpha*Exp[ alpha t];
  Table[{Re[w Exp[I n alpha 2 Pi]], Im[w Exp[I n alpha 2 Pi]]}, {n, maxn}]
g8=ListPlot[p[1,1/8,8], AspectRatio->Automatic, PlotStyle->{PointSize[0.03]}]
groot2a=ListPlot[p[1, Sqrt[2], 100], AspectRatio -> Automatic]
groot2b=ListPlot[p[1, Sqrt[2], 1000], AspectRatio -> Automatic]
Manipulate[ListPlot[p[1, Sqrt[2], n], AspectRatio -> Automatic], {n, 1, 1000}]
```

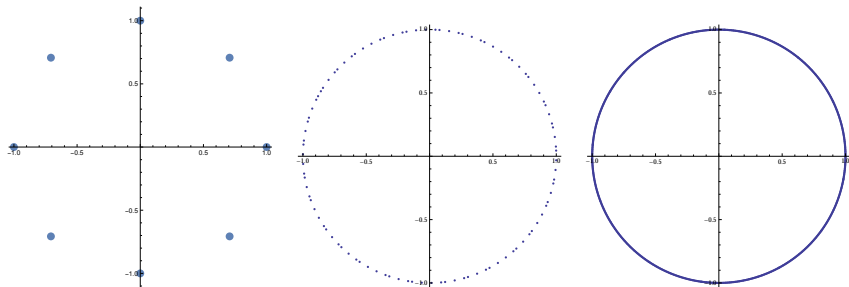


Figure 1: $p(1, 1/8)$, $p(1, \sqrt{2})$ (100 個), $p(1, \sqrt{2})$ (1000 個)

4.3 初等関数ワールド

三角関数、双曲線関数など、指数関数を用いて表される初等関数が多いが、前項で指数関数の逆関数である対数関数を(複素関数として)定義したことで、それら初等関数の逆関数が対数関数を用いて表すことが出来る。

例えば

$$\begin{aligned}\sin z = w &\Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = w \\ &\Leftrightarrow \text{途中省略} \\ &\Leftrightarrow z = -i \log \left(iw + \sqrt{1 - w^2} \right)\end{aligned}$$

であるから、次のように定義する。

$$\sin^{-1} z = -i \log \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right).$$

これらは、分枝を選んで一価関数にしなければ多価関数である。多価関数を扱うには、「解析接続」を学んでからとりかかるのが良い。この講義では詳細は省略する。

4.3 初等関数ワールド おまけ

一通り書いておこう。

$$\arcsin z = \sin^{-1} z := -i \log \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right),$$

$$\arccos z = \cos^{-1} z := i \log \left(z - i\sqrt{1 - z^2} \right) = \frac{\pi}{2} + i \log \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right),$$

$$\arctan z = \tan^{-1} z := \frac{i}{2} (\log(1 - iz) - \log(1 + iz)),$$

$$\operatorname{arcsinh} z = \sinh^{-1} z := \log \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right),$$

$$\operatorname{arccosh} z = \cosh^{-1} z := \log \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right),$$

$$\operatorname{arctanh} z = \tanh^{-1} z := \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}.$$

問 次式を確かめよ。

$$(\arcsin z)' = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad (\arccos z)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad (\arctan z)' = \frac{1}{1 + z^2},$$

$$(\operatorname{arcsinh} z)' = \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1}}, \quad (\operatorname{arccosh} z)' = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}, \quad (\operatorname{arctanh} z)' = \frac{1}{1 - z^2}.$$

問 次式を確かめよ。

$$\cosh(iz) = \cos z, \quad \sinh(iz) = i \sin z.$$

5 線積分 5.1 線積分の定義

いよいよ関数論の佳境の入り口である。実関数のときもそうであったように、微分と積分の両方が絡むと強力である。
(高速道路までの街中の道をトロトロ走って来たが、これからスピードをあげる感じ。景色がどんどん変わる。)

定義 15.3 (線積分)

Ω は \mathbb{C} の開集合、 $C : z = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) は Ω 内の区分的に C^1 級の曲線、 $f : C^* \rightarrow \mathbb{C}$ は連続とする。ただし $C^* := \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ 。このとき

$$(5) \quad \int_C f(z) dz := \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

とおき、 f の曲線 C に沿う線積分と呼ぶ。

また

$$(6) \quad \int_C f(z) |dz| := \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt$$

と定める。

5.1 線積分の定義

例 15.4

$f(z) = z^2$, $C: z = \varphi(\theta) = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, \pi]$) のとき。 $\varphi'(\theta) = ie^{i\theta}$ であるから

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= \int_0^\pi f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)d\theta = \int_0^\pi (e^{i\theta})^2 \cdot ie^{i\theta} d\theta = i \int_0^\pi e^{3i\theta} d\theta \\ &= i \left[\frac{e^{3i\theta}}{3i} \right]_0^\pi = \frac{1}{3} (e^{3i\pi} - e^{3 \cdot 0}) = \frac{(-1) - 1}{3} = -\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

例 15.5

$f(z) = \frac{1}{z}$, $C: z = \varphi(\theta) = e^{i\theta}$ ($\theta \in [0, 2\pi]$) のとき。 $\varphi'(\theta) = ie^{i\theta}$ であるから

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= \int_0^{2\pi} f(\varphi(\theta))\varphi'(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} \cdot ie^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi i.\end{aligned}$$

5 線積分 5.1 線積分の定義

注意事項

① 曲線の始点、終点が一致しても経路は無限にたくさんあるので、実1変数関数の積分 $\int_a^b f(x) dx$ のように、始点と終点を指定することでは積分は定まらない。

② φ は区分的に C^1 級であるから

$(\exists \{t_j\}_{j=0}^m) \quad \alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta \wedge$ 各小区間 $[t_{j-1}, t_j]$ で φ は C^1 級。

t_j において φ の片側微分係数は存在するが、微分係数 $\varphi'(t_j)$ は存在しないことがありうる。

$$\int_C f(z) dz := \sum_{j=1}^m \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

とみなすべきである。そういう意味では広義積分である。

5.1 線積分の定義

- ⑧ $F(t) := f(\varphi(t))\varphi'(t)$ は、実変数の複素数値関数である。複素数値関数の積分が初めてという人がいるかもしれない。実数値関数の積分と同様に Riemann 和の極限として定義しても良いし、

$$(7) \quad \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt := \int_{\alpha}^{\beta} U(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} V(t) dt$$

のように定義しても良い (ただし $U(t) := \operatorname{Re} F(t)$, $V(t) := \operatorname{Im} F(t)$)。

$\alpha < \beta$ であれば

$$(8) \quad \left| \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |F(t)| dt$$

が成り立つ。Riemann 和で定義する場合は、三角不等式から得られる

$$\left| \sum_j F(t_j) \Delta t_j \right| \leq \sum_j |F(t_j)| \Delta t_j$$

から証明出来る。(7) で定義する場合はちょっとした演習問題になる。

5.1 線積分の定義

④ (とても良く使う。)

$$(9) \quad \left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz|.$$

実際、 C が $z = \varphi(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$) とすると

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(\varphi(t)) \varphi'(t)| dt$$

と書き換えられるが、これは (8) によって確かに成立する。

大抵は、この後

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| \leq \max_{z \in C^*} |f(z)| \int_C |dz| = \max_{z \in C^*} |f(z)| \times (C \text{ の弧長})$$

と評価することになる。

注 $C^* = C$ の跡 = φ の値域 = Image $\varphi = \{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ である。

注 定義より $\int_C |dz| = \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi'(t)| dt$ であるから、これは C の弧長である。

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2020/complex2020.pdf> (2014～).