複素関数・同演習 第 14 回

〜対数関数と冪関数 (2)〜

桂田 祐史（かつらだ まさし）

2020 年 11 月 11 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 複素対数関数の続き、特に定義 (講義ノート [1] の §4.1)。
  結構込み入っているので、集中して取り組んで下さい。
- コンピューター (Mathemaitca) の複素関数の計算への利用。
- 宿題 7 を出します (締め切りは 11 月 17 日 13:30)。

授業用 WWW サーバーの置き換えをしました (2020/11/8)。最初の数時間は一部動作がおかしいところがありましたが (それに遭遇した人には申し訳なく思います)、現在は正常に動いていると考えています。もしおかしなところ、気になるところに気づいた場合は、報告してくれると助かります。

例 14.1 (三角関数の方程式)

1. $\cos z = 0$ を解け。

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0$$

4.1.2 $e^w = z$ を解く (続き)

例 14.1 (三角関数の方程式)

1. $\cos z = 0$ を解け。

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz}$$

例 14.1 (三角関数の方程式)

1. $\cos z = 0$ を解け。

$$\begin{aligned}\cos z = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0\\ &\Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz}\\ &\Leftrightarrow e^{2iz} = -e^{0} = -1 = 1 \cdot e^{\pi i}\end{aligned}$$

例 14.1 (三角関数の方程式)

1. $\cos z = 0$ を解け。

$$\begin{aligned}\cos z = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0\\ &\Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz}\\ &\Leftrightarrow e^{2iz} = -e^{0} = -1 = 1 \cdot e^{\pi i}\\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ 2iz = \log 1 + i(\pi + 2n\pi)\end{aligned}$$

例 14.1 (三角関数の方程式)

1. $\cos z = 0$ を解け。

$$\begin{aligned}\cos z = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0\\ &\Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz}\\ &\Leftrightarrow e^{2iz} = -e^0 = -1 = 1 \cdot e^{\pi i}\\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ 2iz = \log 1 + i(\pi + 2n\pi)\\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ z = (n + 1/2)\,\pi.\end{aligned}$$

例 14.1 (三角関数の方程式)

1. $\cos z = 0$ を解け。

$$\begin{aligned}\cos z = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz} \\ &\Leftrightarrow e^{2iz} = -e^0 = -1 = 1 \cdot e^{\pi i} \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ 2iz = \log 1 + i(\pi + 2n\pi) \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ z = (n + 1/2)\,\pi.\end{aligned}$$

(別解) $X = e^{iz}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\cos z = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = 0 \Leftrightarrow X + \frac{1}{X} = 0 \Leftrightarrow X^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow X = \pm i \\ &\Leftrightarrow e^{iz} = \pm i = 1 \cdot e^{\pm\frac{\pi}{2} i} \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ iz = \log 1 + (2n \pm 1/2)\pi i \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})\ z = (2n \pm 1/2)\pi.\end{aligned}$$

例 14.1 (三角関数の方程式)

1. $\cos z = 0$ を解け。

$$\begin{aligned}\cos z = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 0\\ &\Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz}\\ &\Leftrightarrow e^{2iz} = -e^0 = -1 = 1\cdot e^{\pi i}\\ &\Leftrightarrow (\exists n\in\mathbb{Z})\ 2iz = \log 1 + i(\pi + 2n\pi)\\ &\Leftrightarrow (\exists n\in\mathbb{Z})\ z = (n+1/2)\,\pi.\end{aligned}$$

(別解) $X = e^{iz}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\cos z = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right) = 0 \Leftrightarrow X + \frac{1}{X} = 0 \Leftrightarrow X^2+1 = 0 \Leftrightarrow X = \pm i\\ &\Leftrightarrow e^{iz} = \pm i = 1\cdot e^{\pm\frac{\pi}{2}i}\\ &\Leftrightarrow (\exists n\in\mathbb{Z})\ iz = \log 1 + (2n\pm 1/2)\pi i \Leftrightarrow (\exists n\in\mathbb{Z})\ z = (2n\pm 1/2)\pi.\end{aligned}$$

上の解と違うように見えるかもしれないが、実は同じである。 □

例 14.1 (三角関数の方程式 (続き))

例 14.1 (三角関数の方程式 (続き))

別解のように $X := e^{iz}$ とおいて、X についての方程式に持ち込む方が見通し良いかもしれない。

2. $\cos z = 2$ を解け。

例 14.1 (三角関数の方程式 (続き))

別解のように $X := e^{iz}$ とおいて、X についての方程式に持ち込む方が見通し良いかもしれない。

2. $\cos z = 2$ を解け。

(解) $X := e^{iz}$ とおくと

$$\begin{aligned}\cos z = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2 \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 4 \Leftrightarrow X + \frac{1}{X} = 4 \\ &\Leftrightarrow X^2 - 4X + 1 = 0 \Leftrightarrow X = 2 \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}.\end{aligned}$$

例 14.1 (三角関数の方程式 (続き))

別解のように $X := e^{iz}$ とおいて、X についての方程式に持ち込む方が見通し良いかもしれない。

2. $\cos z = 2$ を解け。

(解) $X := e^{iz}$ とおくと

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2 \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 4 \Leftrightarrow X + \frac{1}{X} = 4$$
$$\Leftrightarrow X^2 - 4X + 1 = 0 \Leftrightarrow X = 2 \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

$2 \pm \sqrt{3} > 0$ であるから、$2 \pm \sqrt{3} = (2 \pm \sqrt{3})e^{i \cdot 0}$ が極形式である。

例 14.1 (三角関数の方程式 (続き))

別解のように $X := e^{iz}$ とおいて、X についての方程式に持ち込む方が見通し良いかもしれない。

2. $\cos z = 2$ を解け。

(解) $X := e^{iz}$ とおくと

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2 \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 4 \Leftrightarrow X + \frac{1}{X} = 4$$
$$\Leftrightarrow X^2 - 4X + 1 = 0 \Leftrightarrow X = 2 \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

$2 \pm \sqrt{3} > 0$ であるから、$2 \pm \sqrt{3} = (2 \pm \sqrt{3}) e^{i \cdot 0}$ が極形式である。ゆえに

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad iz = \log(2 \pm \sqrt{3}) + (0 + 2n\pi) i$$
$$\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad z = -i \log(2 \pm \sqrt{3}) + 2n\pi.$$

例 14.1 (三角関数の方程式 (続き))

別解のように $X := e^{iz}$ とおいて、X についての方程式に持ち込む方が見通し良いかもしれない。

2. $\cos z = 2$ を解け。

(解) $X := e^{iz}$ とおくと

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2 \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 4 \Leftrightarrow X + \frac{1}{X} = 4$$
$$\Leftrightarrow X^2 - 4X + 1 = 0 \Leftrightarrow X = 2 \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

$2 \pm \sqrt{3} > 0$ であるから、$2 \pm \sqrt{3} = (2 \pm \sqrt{3}) e^{i \cdot 0}$ が極形式である。ゆえに

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad iz = \log(2 \pm \sqrt{3}) + (0 + 2n\pi)i$$
$$\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad z = -i \log(2 \pm \sqrt{3}) + 2n\pi.$$

すなわち

$$z = 2n\pi - i \log\left(2 \pm \sqrt{3}\right) \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad \square$$

4.1.3 複素対数関数の定義

“複素対数関数” $\log z$ を定義しよう。

やり方が複数ある。

4.1.3 複素対数関数の定義

"複素対数関数" $\log z$ を定義しよう。

やり方が複数ある。

1. $e^w = z$ を満たす w 全てを採用する。

4.1.3 複素対数関数の定義

“複素対数関数” $\log z$ を定義しよう。

やり方が複数ある。

1. $e^w = z$ を満たす w 全てを採用する。つまり $z = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とするとき

$$\log z := \log r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{1}$$

4.1.3 複素対数関数の定義

“複素対数関数” $\log z$ を定義しよう。

やり方が複数ある。

1. $e^w = z$ を満たす w 全てを採用する。つまり $z = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とするとき

$$\log z := \log r + i(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{1}$$

この log は値が 1 つに決まらないので、写像・関数ではない。
(無限) **多価関数**という。
これと区別するため、普通の関数を**一価関数**と呼ぶことがある。

4.1.3 複素対数関数の定義

2. I を幅 2π の半開区間とする。

   例えば $I = [0, 2\pi)$, $I = (-\pi, \pi]$, あるいはより一般に $\alpha \in \mathbb{R}$ として
   $I = [\alpha, \alpha + 2\pi)$ または $I = (\alpha, \alpha + 2\pi]$ とする。

2. I を幅 2π の半開区間とする。

例えば $I=[0,2\pi)$, $I=(-\pi,\pi]$, あるいはより一般に $\alpha\in\mathbb{R}$ として $I=[\alpha,\alpha+2\pi)$ または $I=(\alpha,\alpha+2\pi]$ とする。このとき、任意の $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対して

$$z=re^{i\theta},\quad r>0,\quad \theta\in I \tag{2a}$$

を満たす r, θ が一意的に存在するので

$$\log z:=\log r+i\theta \tag{2b}$$

とおく。$\log\colon\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ であり、値域は $\{u+iv\mid u\in\mathbb{R},\ v\in I\}$.

2. I を幅 2π の半開区間とする。

   例えば $I = [0, 2\pi)$, $I = (-\pi, \pi]$, あるいはより一般に $\alpha \in \mathbb{R}$ として $I = [\alpha, \alpha + 2\pi)$ または $I = (\alpha, \alpha + 2\pi]$ とする。このとき、任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して

   $$z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \theta \in I \tag{2a}$$

   を満たす r, θ が一意的に存在するので

   $$\log z := \log r + i\theta \tag{2b}$$

   とおく。$\log\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ であり、値域は $\{u + iv \mid u \in \mathbb{R},\ v \in I\}$.
   $I = [\alpha, \alpha + 2\pi)$ の場合に値域を図示してみること。

4.1.3 複素対数関数の定義

2. I を幅 2π の半開区間とする。

例えば $I=[0,2\pi)$, $I=(-\pi,\pi]$, あるいはより一般に $\alpha\in\mathbb{R}$ として $I=[\alpha,\alpha+2\pi)$ または $I=(\alpha,\alpha+2\pi]$ とする。このとき、任意の $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に対して

$$z=re^{i\theta},\quad r>0,\quad \theta\in I \tag{2a}$$

を満たす r, θ が一意的に存在するので

$$\log z:=\log r+i\theta \tag{2b}$$

とおく。$\log\colon\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ であり、値域は $\{u+iv\mid u\in\mathbb{R},\ v\in I\}$.
$I=[\alpha,\alpha+2\pi)$ の場合に値域を図示してみること。

このように、適当なルールで 1 つの値を選んで一価関数とするとき、その一価関数を元の多価関数の**分枝**（ぶんし） (branch) と呼ぶ。

特に $I=(-\pi,\pi]$ のとき、**対数関数の主値**と呼び、先頭が大文字の $\operatorname{Log} z$ で表す。

対数関数の主値 (覚える)

(3) $\quad z=re^{i\theta}, r>0, \theta\in(-\pi,\pi]$ とするとき $\operatorname{Log} z := \log r + i\theta.$

偏角の主値 Arg を用いると

(4)
$$\operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z.$$

$\operatorname{Log}\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ であり、値域は $\{u+iv \mid u\in\mathbb{R},\ v\in(-\pi,\pi]\}$.

4.1.3 複素対数関数の定義 (続き)

Log は $N := \{z \in \mathbb{C} \mid z < 0\}$ で不連続である (N を $(-\infty, 0)$ と書かせてもらう)。$x \in N$ とするとき

$$\lim_{\substack{z \to x \\ \mathrm{Im}\, z > 0}} \mathrm{Log}\, z = \log |x| + i\pi$$

$$\lim_{\substack{z \to x \\ \mathrm{Im}\, z < 0}} \mathrm{Log}\, z = \log |x| - i\pi$$

($\because$ z と原点との距離は $|z|$. $z \to x$ のとき $|z| \to |x|$. $\mathrm{Im}\, z > 0$ と $\mathrm{Im}\, z < 0$ で $z \to x$ とすると、それぞれ $\theta \to \pi$, $\theta \to -\pi$.)

Mathematica の勧め

現象数理学科 Mac にインストールされている **Mathematica** は、**数式処理系**と呼ばれるソフトウェアである。プログラミング言語処理系の一種でもあるが、多くのプログラミング言語 (例えば C, Python, MATLAB, ⋯) は、数値計算はできても数式の計算はできない。

Mathematica の勧め

現象数理学科 Mac にインストールされている **Mathematica** は、**数式処理系**と呼ばれるソフトウェアである。プログラミング言語処理系の一種でもあるが、多くのプログラミング言語 (例えば C, Python, MATLAB, ⋯) は、数値計算はできても数式の計算はできない。

これを使うと、従来手計算するしかなかった多くの計算を実行することができる。学習・研究に生かせるように、習得することを勧めたい。

Mathematica の勧め

現象数理学科 Mac にインストールされている **Mathematica** は、**数式処理系**と呼ばれるソフトウェアである。プログラミング言語処理系の一種でもあるが、多くのプログラミング言語 (例えば C, Python, MATLAB, ⋯) は、数値計算はできても数式の計算はできない。

これを使うと、従来手計算するしかなかった多くの計算を実行することができる。学習・研究に生かせるように、習得することを勧めたい。

「複素関数と Mathematica」という説明を用意してある (授業 WWW サイトに置いてある, PDF ならばクリックすればブラウザが起動するはず)。その中では、この「複素関数」の宿題に現れるような計算 (実際、過去の年度の宿題に出て来た問題を取り上げている) の実行例が載っている。

- 現象数理学科でライセンスを購入しているので、所属する学生は利用できる。毎年 4 月末日にライセンスの更新がある (更新できない場合は、池田先生か桂田に相談する)。

Mathematica の勧め　全般的な注意

- 現象数理学科でライセンスを購入しているので、所属する学生は利用できる。毎年 4 月末日にライセンスの更新がある (更新できない場合は、池田先生か桂田に相談する)。
- アプリケーション・フォルダに Mathematica.app がある (私は Dock に追加しています)。

Mathematica の勧め　全般的な注意

- 現象数理学科でライセンスを購入しているので、所属する学生は利用できる。毎年 4 月末日にライセンスの更新がある (更新できない場合は、池田先生か桂田に相談する)。
- アプリケーション・フォルダに Mathematica.app がある (私は Dock に追加しています)。
- (新しくプログラムを作る場合) Mathematica を起動後、「新規ドキュメント」でノートブックを開き、コマンドを入力して実行する。

Mathematica の勧め　全般的な注意

- 現象数理学科でライセンスを購入しているので、所属する学生は利用できる。毎年 4 月末日にライセンスの更新がある (更新できない場合は、池田先生か桂田に相談する)。
- アプリケーション・フォルダに Mathematica.app がある (私は Dock に追加しています)。
- (新しくプログラムを作る場合) Mathematica を起動後、「新規ドキュメント」でノートブックを開き、コマンドを入力して実行する。
- コマンドの最後に shift + return (enter) とタイプする。

Mathematica の勧め　全般的な注意

- 現象数理学科でライセンスを購入しているので、所属する学生は利用できる。毎年4 月末日にライセンスの更新がある (更新できない場合は、池田先生か桂田に相談する)。
- アプリケーション・フォルダに Mathematica.app がある (私は Dock に追加しています)。
- (新しくプログラムを作る場合) Mathematica を起動後、「新規ドキュメント」でノートブックを開き、コマンドを入力して実行する。
- コマンドの最後に $\boxed{\text{shift}}$+$\boxed{\text{return (enter)}}$ とタイプする。
- 直前の結果は % で参照できる。直前のコマンドは $\boxed{\text{command}}$+L で呼び出せる。

Mathematica の勧め　全般的な注意

- 現象数理学科でライセンスを購入しているので、所属する学生は利用できる。毎年 4 月末日にライセンスの更新がある (更新できない場合は、池田先生か桂田に相談する)。
- アプリケーション・フォルダに Mathematica.app がある (私は Dock に追加しています)。
- (新しくプログラムを作る場合) Mathematica を起動後、「新規ドキュメント」でノートブックを開き、コマンドを入力して実行する。
- コマンドの最後に shift + return (enter) とタイプする。
- 直前の結果は % で参照できる。直前のコマンドは command +L で呼び出せる。
- コマンドは編集して再実行できる (挿入、上書き修正、削除、などが可能)。

Mathematica の勧め　全般的な注意

- 現象数理学科でライセンスを購入しているので、所属する学生は利用できる。毎年4月末日にライセンスの更新がある (更新できない場合は、池田先生か桂田に相談する)。
- アプリケーション・フォルダに Mathematica.app がある (私は Dock に追加しています)。
- (新しくプログラムを作る場合) Mathematica を起動後、「新規ドキュメント」でノートブックを開き、コマンドを入力して実行する。
- コマンドの最後に shift + return (enter) とタイプする。
- 直前の結果は % で参照できる。直前のコマンドは command +L で呼び出せる。
- コマンドは編集して再実行できる (挿入、上書き修正、削除、などが可能)。
- ??関数名 としてマニュアルが開ける (非常に便利。これに慣れること。)。

Mathematica の勧め　全般的な注意

- 現象数理学科でライセンスを購入しているので、所属する学生は利用できる。毎年 4 月末日にライセンスの更新がある (更新できない場合は、池田先生か桂田に相談する)。
- アプリケーション・フォルダに Mathematica.app がある (私は Dock に追加しています)。
- (新しくプログラムを作る場合) Mathematica を起動後、「新規ドキュメント」でノートブックを開き、コマンドを入力して実行する。
- コマンドの最後に $\boxed{\text{shift}}$+$\boxed{\text{return (enter)}}$ とタイプする。
- 直前の結果は % で参照できる。直前のコマンドは $\boxed{\text{command}}$+L で呼び出せる。
- コマンドは編集して再実行できる (挿入、上書き修正、削除、などが可能)。
- ??関数名 としてマニュアルが開ける (非常に便利。これに慣れること。)。
- 関数名の大文字・小文字に注意する。用意されている関数名の先頭は大文字である。

Mathematica の勧め　全般的な注意

- 現象数理学科でライセンスを購入しているので、所属する学生は利用できる。毎年 4 月末日にライセンスの更新がある (更新できない場合は、池田先生か桂田に相談する)。
- アプリケーション・フォルダに Mathematica.app がある (私は Dock に追加しています)。
- (新しくプログラムを作る場合) Mathematica を起動後、「新規ドキュメント」でノートブックを開き、コマンドを入力して実行する。
- コマンドの最後に shift + return (enter) とタイプする。
- 直前の結果は % で参照できる。直前のコマンドは command +L で呼び出せる。
- コマンドは編集して再実行できる (挿入、上書き修正、削除、などが可能)。
- ??関数名 としてマニュアルが開ける (非常に便利。これに慣れること。)。
- 関数名の大文字・小文字に注意する。用意されている関数名の先頭は大文字である。
- ノートブックとして保存しておける (ファイル名末尾 .nb)。

Mathematica の勧め　全般的な注意

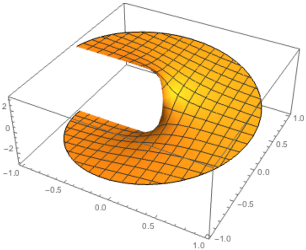
- 現象数理学科でライセンスを購入しているので、所属する学生は利用できる。毎年 4 月末日にライセンスの更新がある (更新できない場合は、池田先生か桂田に相談する)。
- アプリケーション・フォルダに Mathematica.app がある (私は Dock に追加しています)。
- (新しくプログラムを作る場合) Mathematica を起動後、「新規ドキュメント」でノートブックを開き、コマンドを入力して実行する。
- コマンドの最後に $\boxed{\text{shift}}$+$\boxed{\text{return (enter)}}$ とタイプする。
- 直前の結果は `%` で参照できる。直前のコマンドは $\boxed{\text{command}}$+L で呼び出せる。
- コマンドは編集して再実行できる (挿入、上書き修正、削除、などが可能)。
- `??関数名` としてマニュアルが開ける (非常に便利。これに慣れること。)。
- 関数名の大文字・小文字に注意する。用意されている関数名の先頭は大文字である。
- ノートブックとして保存しておける (ファイル名末尾 `.nb`)。
- 既存のノートブックはダブルクリックで開ける。
  コマンドを 1 つ 1 つ $\boxed{\text{shift}}$+$\boxed{\text{return}}$ で実行する以外に、[評価] → [ノートブックを評価] で順番に全部実行することもできる。

4.1.3 複素対数関数の定義 (続き)

Mathematica で Log の実部・虚部のグラフを描こう

```
Plot3D[Im[Log[x+I y]],{x,-1,1},{y,-1,1},
  RegionFunction->Function[{x,y,z},x^2+y^2<1]]
```

水色部分は $x^2+y^2<1$ の範囲だけでグラフを描くための指定 (なくても描ける)。
`Plot3D[]` の代わりに `ContourPlot[]` にしたり、`Im[]` の代わりに `Re[]` にしたり。



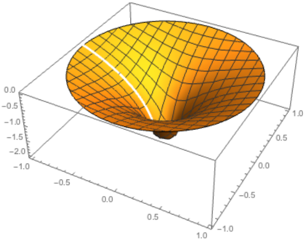


Figure 1: $\mathrm{Im}\,\mathrm{Log}(x+yi)$, $\mathrm{Re}\,\mathrm{Log}(x+yi)$ のグラフ

ちなみに無限多価関数 log の "グラフ" は、上にも下にもずっと続く螺旋階段である。

4.1.3 複素対数関数の定義 (続き)　正則な制限

上では Log の定義域を $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ とした。すると $N=\{z\in\mathbb{C}\mid z<0\}$ に属する任意の点で不連続であるが、N を除くと ($\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ に制限すると) 連続であるだけでなく、正則になる。実際、次の定理が成り立つ。

上では Log の定義域を $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ とした。すると $N=\{z\in\mathbb{C}\mid z<0\}$ に属する任意の点で不連続であるが、N を除くと ($\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ に制限すると) 連続であるだけでなく、正則になる。実際、次の定理が成り立つ。

定理 14.2 (対数関数の主値の正則性)

$\mathrm{Log}\colon \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]\to\{w\in\mathbb{C}\mid -\pi<\mathrm{Im}\,w<\pi\}$ に制限すると、これは正則関数

$$f\colon \Omega:=\{w\in\mathbb{C}\mid -\pi<\mathrm{Im}\,w<\pi\}\to\mathbb{C}\setminus(-\infty,0],\quad f(w)=e^w\quad(w\in\Omega)$$

の逆関数である。この (制限した) Log は正則であり、$(\mathrm{Log}\,z)'=\dfrac{1}{z}$.

4.1.3 複素対数関数の定義 (続き)　正則な制限

上では Log の定義域を $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ とした。すると $N=\{z\in\mathbb{C}\mid z<0\}$ に属する任意の点で不連続であるが、N を除くと ($\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ に制限すると) 連続であるだけでなく、正則になる。実際、次の定理が成り立つ。

定理 14.2 (対数関数の主値の正則性)

$\mathrm{Log}\colon \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]\to\{w\in\mathbb{C}\mid -\pi<\operatorname{Im}w<\pi\}$ に制限すると、これは正則関数

$$f\colon \Omega:=\{w\in\mathbb{C}\mid -\pi<\operatorname{Im}w<\pi\}\to\mathbb{C}\setminus(-\infty,0],\quad f(w)=e^w\quad(w\in\Omega)$$

の逆関数である。この (制限した) Log は正則であり、$(\mathrm{Log}\,z)'=\dfrac{1}{z}$.

証明　複素関数においても、逆関数の微分の公式、逆関数定理は成立する (現時点では、導関数が連続である正則関数についてのみ逆関数定理が証明出来ている)。

上では Log の定義域を $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ とした。すると $N=\{z\in\mathbb{C}\mid z<0\}$ に属する任意の点で不連続であるが、N を除くと ($\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ に制限すると) 連続であるだけでなく、正則になる。実際、次の定理が成り立つ。

定理 14.2 (対数関数の主値の正則性)

$\mathrm{Log}\colon \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]\to\{w\in\mathbb{C}\mid -\pi<\operatorname{Im}w<\pi\}$ に制限すると、これは正則関数

$$f\colon \Omega:=\{w\in\mathbb{C}\mid -\pi<\operatorname{Im}w<\pi\}\to\mathbb{C}\setminus(-\infty,0],\quad f(w)=e^w\quad(w\in\Omega)$$

の逆関数である。この (制限した) Log は正則であり、$(\mathrm{Log}\,z)'=\dfrac{1}{z}$.

証明　複素関数においても、逆関数の微分の公式、逆関数定理は成立する (現時点では、導関数が連続である正則関数についてのみ逆関数定理が証明出来ている)。

$f(w)=e^w$ は正則、$f'(w)=e^w$ は連続、$f'(w)=e^w\neq0$ であるから、その逆関数 Log は正則である。$z=e^w$ のとき、$\dfrac{dz}{dw}=e^w=z$ なので

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{\frac{dz}{dw}}=\frac{1}{z}.\quad すなわち\quad (\mathrm{Log}\,z)'=\frac{1}{z}.\quad\square$$

4.1.3 複素対数関数の定義

対数関数の正則性は、主値に限らず、任意の連続な分枝について成り立つ。

定理 14.3 (対数関数の分枝の正則性)

幅 2π の任意の半開区間 $I = [\alpha, \alpha + 2\pi)$ あるいは $I = (\alpha, \alpha + 2\pi]$ を選んで、$z = re^{i\theta}$ ($r > 0$, $\theta \in I$) に対して

$$\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi)$$

と定めた $\log$ も、$\mathbb{C} \setminus N_\alpha$ (ただし $N_\alpha := \left\{ re^{i\alpha} \,\middle|\, r \geq 0 \right\}$) に制限すると正則関数になり、

$$(\log z)' = \frac{1}{z}.$$

4.1.3 複素対数関数の定義

対数関数の正則性は、主値に限らず、任意の連続な分枝について成り立つ。

定理 14.3 (対数関数の分枝の正則性)

幅 2π の任意の半開区間 $I=[\alpha,\alpha+2\pi)$ あるいは $I=(\alpha,\alpha+2\pi]$ を選んで、$z=re^{i\theta}$ $(r>0,\ \theta\in I)$ に対して

$$\log z=\log r+i(\theta+2n\pi)$$

と定めた $\log$ も、$\mathbb{C}\setminus N_\alpha$ (ただし $N_\alpha:=\left\{re^{i\alpha}\;\middle|\;r\ge 0\right\}$) に制限すると正則関数になり、

$$(\log z)'=\frac{1}{z}.$$

すでに述べたように、一価関数にした $\log$ を対数関数の分枝と呼ぶが、N_α のように、それを除くことで 1 つの分枝(ぶんし)を截(き)り出すことができる曲線 (普通は半直線や線分を選ぶ) を、**分岐截線**(ぶんきせっせん) (branch cut) と呼ぶ。

(私は「截」という字が覚えられないので、手書きでは branch cut と書くことが多い。)

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2020/complex2020.pdf (2014〜).