複素関数・同演習 第13回

～冪級数 (6) 収束円周上での収束発散, 対数関数と冪関数～

桂田 祐史 (かつらだ まさし)

2020年11月10日

目次

本日の内容・連絡事項

- Abel の級数変形法を使う定理 2 つ (1 つは前回残した証明, もう 1 つは Abel の連続性定理だが、こちらは軽い説明に止める)。これで長く続いた冪級数も一段落。「対数関数と冪関数」(講義ノート [1] の §4) に入る。
- 宿題 6 の解説をします (動画公開は 11 月 10 日 13:30 以降)。
  注: 宿題の解説が長くなっています (今後もその傾向が強くなる)。その分講義のパートはなるべく短くするように努めます。
- 宿題 7 を出します (締め切りは 11 月 17 日 13:30)。

前回、次の定理を紹介して、適用例を示したところで時間切れとなった。

定理 13.1 (Abel の級数変形法, 部分求和公式)

$\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ は部分和が有界であり、$\{\beta_n\}_{n\geq 0}$ は $\beta_n \downarrow 0$ $(n\to\infty)$ を満たすとする。このとき $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n$ は収束する。

証明　$s_n := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \ (n \geq 0)$ とおく。

$$\alpha_k = s_k - s_{k-1} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad \alpha_0 = s_0$$

であるから

3.5.1 Abel の級数変形法

証明　$s_n := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \ (n \geq 0)$ とおく。

$$\alpha_k = s_k - s_{k-1} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad \alpha_0 = s_0$$

であるから

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k = \alpha_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k = s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) \beta_k$$

証明 $s_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \ (n \geq 0)$ とおく。

$$\alpha_k = s_k - s_{k-1} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad \alpha_0 = s_0$$

であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k &= \alpha_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k = s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) \beta_k \\ &= s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k \beta_k - \sum_{k=1}^{n} s_{k-1} \beta_k\end{aligned}$$

証明 $s_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \ (n \geq 0)$ とおく。

$$\alpha_k = s_k - s_{k-1} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad \alpha_0 = s_0$$

であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k &= \alpha_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k = s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) \beta_k \\ &= s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k \beta_k - \sum_{k=1}^{n} s_{k-1} \beta_k = s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k \beta_k - \sum_{k=0}^{n-1} s_k \beta_{k+1}\end{aligned}$$

証明 $s_n := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \ (n \geq 0)$ とおく。

$$\alpha_k = s_k - s_{k-1} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad \alpha_0 = s_0$$

であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k &= \alpha_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k = s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) \beta_k \\ &= s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k \beta_k - \sum_{k=1}^{n} s_{k-1} \beta_k = s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k \beta_k - \sum_{k=0}^{n-1} s_k \beta_{k+1} \\ &= s_0 \beta_0 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} s_k \beta_k + s_n \beta_n \right) - \left(s_0 \beta_1 + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \beta_{k+1} \right)\end{aligned}$$

証明 $s_n := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \ (n \geq 0)$ とおく。

$$\alpha_k = s_k - s_{k-1} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad \alpha_0 = s_0$$

であるから

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k &= \alpha_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_k = s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) \beta_k \\
&= s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k \beta_k - \sum_{k=1}^{n} s_{k-1} \beta_k = s_0 \beta_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k \beta_k - \sum_{k=0}^{n-1} s_k \beta_{k+1} \\
&= s_0 \beta_0 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} s_k \beta_k + s_n \beta_n \right) - \left(s_0 \beta_1 + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \beta_{k+1} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} s_k (\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n \beta_n.
\end{aligned}$$

(この式変形を **Abel の級数変形法** (The Abel transformation of a series) あるいは summation by parts と呼ぶ。微分可能な関数についての部分積分に相当する (後述)。)

3.5.1 Abelの級数変形法

(再掲)
$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k = \sum_{k=0}^{n-1} s_k(\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n \beta_n.$$

3.5.1 Abel の級数変形法

(再掲)
$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k = \sum_{k=0}^{n-1} s_k(\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n\beta_n.$$

仮定より、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して $(\forall n \geq 0)\ |s_n| \leq M$.

3.5.1 Abel の級数変形法

(再掲)
$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k = \sum_{k=0}^{n-1} s_k(\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n\beta_n.$$

仮定より、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して $(\forall n \geq 0)\ |s_n| \leq M$.

右辺第 2 項について、$|s_n\beta_n| \leq M\beta_n \to 0\ (n \to \infty)$.

(再掲) $$\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\beta_k=\sum_{k=0}^{n-1}s_k(\beta_k-\beta_{k+1})+s_n\beta_n.$$

仮定より、ある $M\in\mathbb{R}$ が存在して $(\forall n\ge 0)\ |s_n|\le M$.

右辺第 2 項について、$|s_n\beta_n|\le M\beta_n\to 0\ (n\to\infty)$.

右辺第 1 項の級数については、

$$|s_k(\beta_k-\beta_{k+1})|\le M(\beta_k-\beta_{k+1}),$$

$$\sum_{k=0}^{n}M(\beta_k-\beta_{k+1})=M\beta_0-M\beta_{n+1}\to M\beta_0\quad(n\to\infty)$$

3.5.1 Abel の級数変形法

(再掲) $$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k = \sum_{k=0}^{n-1} s_k(\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n \beta_n.$$

仮定より、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して $(\forall n \geq 0)\ |s_n| \leq M$.

右辺第 2 項について、$|s_n \beta_n| \leq M\beta_n \to 0\ (n \to \infty)$.

右辺第 1 項の級数については、

$$|s_k(\beta_k - \beta_{k+1})| \leq M\left(\beta_k - \beta_{k+1}\right),$$

$$\sum_{k=0}^{n} M(\beta_k - \beta_{k+1}) = M\beta_0 - M\beta_{n+1} \to M\beta_0 \quad (n \to \infty)$$

であるから、優級数の定理より $n \to \infty$ のとき、右辺第 1 項は収束する。

3.5.1 Abel の級数変形法

(再掲)
$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k = \sum_{k=0}^{n-1} s_k(\beta_k - \beta_{k+1}) + s_n \beta_n.$$

仮定より、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して $(\forall n \geq 0)\ |s_n| \leq M$.

右辺第 2 項について、$|s_n \beta_n| \leq M\beta_n \to 0\ (n \to \infty)$.

右辺第 1 項の級数については、

$$|s_k(\beta_k - \beta_{k+1})| \leq M(\beta_k - \beta_{k+1}),$$
$$\sum_{k=0}^{n} M(\beta_k - \beta_{k+1}) = M\beta_0 - M\beta_{n+1} \to M\beta_0 \quad (n \to \infty)$$

であるから、優級数の定理より $n \to \infty$ のとき、右辺第 1 項は収束する。

ゆえに $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \beta_n$ は収束する。 □

3.5.1 Abel の級数変形法　部分積分との対応の説明

微分を階差 (差分) に、積分を和に対応させるとき、部分積分 (integral by parts)

$$\int_a^b F'(x)g(x)\,dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

は Abel の級数変形法

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\beta_k = s_n\beta_n - \sum_{k=0}^{n-1} s_k(\beta_{k+1}-\beta_k), \quad (\text{ただし } \alpha_k \text{ は } s_k \text{ の階差})$$

に相当する。

3.5.1 Abel の級数変形法　部分積分との対応の説明

微分を階差 (差分) に、積分を和に対応させるとき、部分積分 (integral by parts)

$$\int_a^b F'(x)g(x)\,dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

は Abel の級数変形法

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\beta_k = s_n\beta_n - \sum_{k=0}^{n-1} s_k(\beta_{k+1}-\beta_k), \quad (\text{ただし } \alpha_k \text{ は } s_k \text{ の階差})$$

に相当する。

微積分の基本定理

1. $f(x) = F'(x)$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$
2. $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ ならば $F'(x) = f(x).$

の離散バージョンは

1'. $b_n = a_{n+1} - a_n$ ならば $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k = a_{n+1} - a_1.$

2'. $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ ならば $s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$, $s_1 = a_1.$

3.5.2 Abel の連続性定理

次の定理はやはり Abel の級数変形法で証明出来る。

定理 13.2 (Abel の連続性定理)

冪級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

が $z = R$ $(R > 0)$ で収束したとする。任意の $K > 1$ に対して

$$\Omega_K := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| < R, \quad \frac{|1 - z/R|}{1 - |z|/R} \le K \right\}$$

とおくとき、f は $\Omega_K \cup \{R\}$ で一様収束する。特に f は $\Omega_K \cup \{R\}$ で連続である。さらに

$$\lim_{\substack{x \in [0,R) \\ x \to R}} f(x) = f(R).$$

3.5.2 Abel の連続性定理

(この辺をじっくり説明すると結構時間を食うけれど、この講義の以下の議論にそれほど影響はないので、気持ち駆け足、世間話のように話します。正直な気持ちを言うと「時間が惜しい」。)

証明の方針

$$\alpha_n := a_n R^n, \quad \beta_n := \left(\frac{z}{R}\right)^n, \quad f_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k,$$

とおいて Abel の級数変形法を用いる。詳細は講義ノートを見て下さい。 □

Ω_K についても、形を見て (次のスライド) 納得するにとどめたい。

(注意の補足) Abel の級数変形法 (定理 13.1) では、$\beta_n \downarrow 0$ という条件を仮定したが、$\{\beta_n\}$ は有界変分 ($\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \sum_n |\beta_{n+1} - \beta_n|$ は収束) という条件で置き換えても良いことはすぐ分かる。それに気づくと、納得しやすい (かも)。

3.5.2 Abel の連続性定理　Ω_K の形

Mathematica で `R=1; Manipulate[ RegionPlot[ x^2+y^2<R^2&& Abs[1-(x+I y)/R]/(1-Abs[x+I y]/R)<=K,{x,-2,2}, {y,-2,2}], {K,1,10,0.1}]` とする。

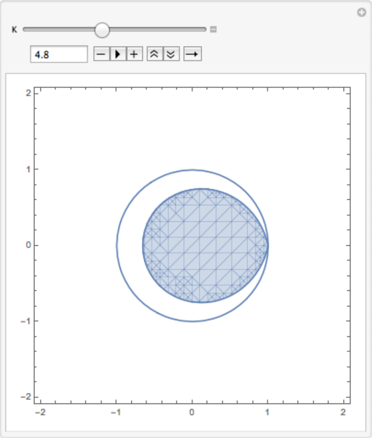

Figure 1: $R=1$, $K=4.8$ の場合の Ω_K と円周 $|z|=R$

3.5.2 Abel の連続性定理　Stolz の路

多くのテキストで、Abel の連続性定理は、次の形で与えられる。

任意の $\alpha \in (0, \pi/2)$ に対して、

$$\lim_{\substack{z \to R \\ |\arg(z-R)-\pi|<\alpha}} f(z) = f(R)$$

「$|\arg(z-R)-\pi| < \alpha$ を満たすようにして $z \to R$ とする」という近づけ方を「**Stolz の路に沿って**」z を R に近づけると、と言っている。

Stoltz の路の条件を満たすとき

$$\frac{|1-z/R|}{1-|z|/R} = \frac{|R-z|}{R-|z|} < 2\sec\alpha$$

が成り立つので、$z \in \Omega_{2\sec\alpha}$ である。ゆえに、そういうテキストの Abel の連続性定理は、定理 13.2 の系として導かれる。

例 13.3 (有名なグレゴリー・ライプニッツ級数について)

(1)
$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} \quad (|z|<1)$$

とおく。これは $D(0;1)$ で正則であり (収束半径が 1 だから)、$z=1$ で収束するので (絶対値が単調減少する交代級数だから)、Abel の連続性定理より

$$f(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \in [0,1)}} f(x).$$

f は $z = x \in (-1,1)$ のとき実関数の $\tan^{-1} x$ と一致し、$\tan^{-1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続であることから、右辺の極限は $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$ に等しい。

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

以上の論法は便利である (この論法を使わずに $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \cdots$ の証明が出来ないわけではないが、使うと簡単である。)。

余談: Abel とはどういう人

昔は、Abel は 5 次方程式が冪根で解けないことを証明した人で、若くしてなくなった天才である、ということを、学生も良く知っていたと思うのだけど、最近そういうのに疎い人が多いような気がするので、少し紹介しておく。

Niels Henrik Abel (1802–1829, ノルウェー) は、冪級数の収束発散についての基礎を確立した (それがこの節の重要な内容だった)。それ以外に

1. α が一般の複素数であるときの $(1+x)^\alpha$ の展開 (一般 2 項定理) の証明
2. 5 次以上の代数方程式は有限回の四則と冪根では解けないことの証明
3. **楕円関数論**

などの仕事を行った。後の二つは、数学読み物にも良く出て来る偉大な仕事である。(偉大な数学者は、彼らの名前を有名にした大きな業績以外に、基礎的なことへの貢献も大きいことが多い、とつねづね感じている。冪級数の理論への貢献をした Abel も例外でない。) □

4 節の短い予告　複素対数関数 $\log z$ と冪関数 z^{α} を定義する。

これらは冪級数による定義では収束円が小さくて、満足しにくい。

4 節の短い予告　複素対数関数 $\log z$ と冪関数 z^α を定義する。

これらは冪級数による定義では収束円が小さくて、満足しにくい。

$\operatorname{Log} z$ は $z=0$ では定義されない。そこで多くの本で、$\operatorname{Log}(z+1)$ の 0 の周りの冪級数展開を求めている。

$$\operatorname{Log}(z+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n \quad (|z|<1).$$

これは本質的には、$\operatorname{Log} z$ を 1 のまわりで冪級数展開した

$$\operatorname{Log} z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n \quad (|z-1|<1)$$

と同値である。

4 節の短い予告　複素対数関数 $\log z$ と冪関数 z^α を定義する。

これらは冪級数による定義では収束円が小さくて、満足しにくい。

$\operatorname{Log} z$ は $z=0$ では定義されない。そこで多くの本で、$\operatorname{Log}(z+1)$ の 0 の周りの冪級数展開を求めている。

$$\operatorname{Log}(z+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n\quad(|z|<1).$$

これは本質的には、$\operatorname{Log} z$ を 1 のまわりで冪級数展開した

$$\operatorname{Log} z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n\quad(|z-1|<1)$$

と同値である。

この事情は、冪関数 z^α についてもほぼ同様である。

$$(z+1)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n\quad(|z|<1),$$

$$z^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}(z-1)^n\quad(|z-1|<1).$$

対数関数 log は指数関数の逆関数として定義し、冪関数 z^α は対数関数を用いて $z^\alpha := e^{\alpha \log z}$ として定める。

対数関数 log は指数関数の逆関数として定義し、冪関数 z^α は対数関数を用いて $z^\alpha := e^{\alpha \log z}$ として定める。

実関数 log (実質的に高校数学) の復習

$f\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in \mathbb{R}$ は狭義単調増加なので単射、値域は $(0, +\infty)$.
$\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in (0, +\infty)$ は全単射であるから逆関数を持つ。それを $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ と表す。
$x \in \mathbb{R}$, $y \in (0, +\infty)$ について、$y = e^x \Leftrightarrow x = \log y$.

対数関数 log は指数関数の逆関数として定義し、冪関数 z^α は対数関数を用いて $z^\alpha := e^{\alpha \log z}$ として定める。

実関数 log (実質的に高校数学) の復習

$f\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in \mathbb{R}$ は狭義単調増加なので単射、値域は $(0, +\infty)$.
$\widetilde{f}\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in (0, +\infty)$ は全単射であるから逆関数を持つ。それを $\log\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ と表す。
$x \in \mathbb{R}$, $y \in (0, +\infty)$ について、$y = e^x \Leftrightarrow x = \log y$.

一方、複素指数関数 $f\colon \mathbb{C} \ni z \mapsto e^z \in \mathbb{C}$ については

- 全射ではない ($e^z \neq 0$ つまり $f(z) = 0$ を満たす z は存在しない)。
- 単射でもない ($e^{z+2\pi i} = e^z$ を満たすので周期関数であり、無限回同じ値を取る)。

4.1.1 Log の Taylor 展開

4.1.2 $e^w = z$ を解く

定理 13.4 (方程式 $e^w = w$ の解)

4.1.2 $e^w = z$ を解く

定理 13.4 (方程式 $e^w = w$ の解)

任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して、w についての方程式 $e^w = z$ の解が存在する。解は、$z = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とするとき

$$w = \log r + i\,(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{2}$$

これは $w = \log|z| + i \arg z$ とも書ける。

定理 13.4 (方程式 $e^w = w$ の解)

任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して、w についての方程式 $e^w = z$ の解が存在する。解は、$z = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とするとき

$$w = \log r + i\,(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{2}$$

これは $w = \log|z| + i \arg z$ とも書ける。

証明　$w = u + iv$ $(u, v \in \mathbb{R})$ とおくと $e^w = e^u e^{iv}$.

$$\begin{aligned} e^w = z &\Leftrightarrow e^u e^{iv} = re^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow r = e^u \quad \text{かつ} \quad e^{iv} = e^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow u = \log r \quad \text{かつ} \quad (\exists n \in \mathbb{Z})v = \theta + 2n\pi \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})w = \log r + i\,(\theta + 2n\pi)\,. \quad \square \end{aligned}$$

定理 13.4 (方程式 $e^w = w$ の解)

任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して、w についての方程式 $e^w = z$ の解が存在する。解は、$z = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とするとき

$$w = \log r + i\,(\theta + 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{2}$$

これは $w = \log|z| + i\arg z$ とも書ける。

証明 $w = u + iv$ $(u, v \in \mathbb{R})$ とおくと $e^w = e^u e^{iv}$.

$$\begin{aligned} e^w = z \Leftrightarrow e^u e^{iv} &= re^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow r = e^u \quad \text{かつ} \quad e^{iv} = e^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow u = \log r \quad \text{かつ} \quad (\exists n \in \mathbb{Z})v = \theta + 2n\pi \\ &\Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z})w = \log r + i\,(\theta + 2n\pi)\,. \quad \square \end{aligned}$$

繰り返しになるが $\Leftrightarrow$ の $\Leftarrow$ は明らか。$\Rightarrow$ については、$e^u e^{iv} = re^{i\theta}$ の両辺の絶対値を取って

$$e^u = \left|e^u e^{iv}\right| = \left|re^{i\theta}\right| = r\ (\neq 0).$$

それで $e^u e^{iv} = re^{i\theta}$ を割って $e^{iv} = e^{i\theta}$.

4.1.2 $e^w = z$ を解く　例

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 13.5 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 13.5 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1$

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 13.5 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 13.5 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i$

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 13.5 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 13.5 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = 2$

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 13.5 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = 2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$

4.1.2 $e^w = z$ を解く　例

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 13.5 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = 2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 2 + (0 + 2n\pi)i$

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 13.5 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = 2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 2 + (0 + 2n\pi)i = \log 2 + 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 13.5 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = 2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 2 + (0 + 2n\pi)i = \log 2 + 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.
一般化すると $x > 0$ に対して $e^w = x$ の解は $w = \log x + 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 13.5 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = 2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 2 + (0 + 2n\pi)i = \log 2 + 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.
一般化すると $x > 0$ に対して $e^w = x$ の解は $w = \log x + 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = -1$

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 13.5 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = 2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 2 + (0 + 2n\pi)i = \log 2 + 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
一般化すると $x > 0$ に対して $e^w = x$ の解は $w = \log x + 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = -1 = 1 \cdot e^{i \cdot \pi}$ の解は

4.1.2 $e^w = z$ を解く　例

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 13.5 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = 2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 2 + (0 + 2n\pi)i = \log 2 + 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
一般化すると $x > 0$ に対して $e^w = x$ の解は $w = \log x + 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = -1 = 1 \cdot e^{i \cdot \pi}$ の解は $w = \log 1 + (\pi + 2n\pi)i = (2n+1)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 13.5 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = 2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 2 + (0 + 2n\pi)i = \log 2 + 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.
一般化すると $x > 0$ に対して $e^w = x$ の解は $w = \log x + 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = -1 = 1 \cdot e^{i \cdot \pi}$ の解は $w = \log 1 + (\pi + 2n\pi)i = (2n+1)\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = -2$

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 13.5 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = 2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 2 + (0 + 2n\pi)i = \log 2 + 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.
一般化すると $x > 0$ に対して $e^w = x$ の解は $w = \log x + 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = -1 = 1 \cdot e^{i \cdot \pi}$ の解は $w = \log 1 + (\pi + 2n\pi)i = (2n+1)\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = -2 = 2 \cdot e^{i \cdot \pi}$ の解は

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 13.5 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = 2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 2 + (0 + 2n\pi)i = \log 2 + 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.
一般化すると $x > 0$ に対して $e^w = x$ の解は $w = \log x + 2n\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = -1 = 1 \cdot e^{i \cdot \pi}$ の解は $w = \log 1 + (\pi + 2n\pi)i = (2n+1)\pi i \ (n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = -2 = 2 \cdot e^{i \cdot \pi}$ の解は $w = \log 2 + (\pi + 2n\pi)i = \log 2 + (2n+1)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

4.1.2 $e^w = z$ を解く　例

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 13.5 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = 2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 2 + (0 + 2n\pi)i = \log 2 + 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
一般化すると $x > 0$ に対して $e^w = x$ の解は $w = \log x + 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = -1 = 1 \cdot e^{i \cdot \pi}$ の解は $w = \log 1 + (\pi + 2n\pi)i = (2n+1)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = -2 = 2 \cdot e^{i \cdot \pi}$ の解は $w = \log 2 + (\pi + 2n\pi)i = \log 2 + (2n+1)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$ の解は $w = (2n + 1/2)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

上の定理は、証明もマスターしてほしいが、公式としてすらすら適用できるようにもなってほしい。

例 13.5 (具体的な z を与えられたとき $e^w = z$ を解いてみる)

$e^w = 0$ は解なし。
$e^w = 1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 1 + (0 + 2n\pi)i = 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = 2 = 2 \cdot e^{i \cdot 0}$ の解は $w = \log 2 + (0 + 2n\pi)i = \log 2 + 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
一般化すると $x > 0$ に対して $e^w = x$ の解は $w = \log x + 2n\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = -1 = 1 \cdot e^{i \cdot \pi}$ の解は $w = \log 1 + (\pi + 2n\pi)i = (2n+1)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.
$e^w = -2 = 2 \cdot e^{i \cdot \pi}$ の解は $w = \log 2 + (\pi + 2n\pi)i = \log 2 + (2n+1)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = i = 1 \cdot e^{i \frac{\pi}{2}}$ の解は $w = (2n + 1/2)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

$e^w = -2i = 2 \cdot e^{-i \frac{\pi}{2}}$ の解は $w = \log 2 + (2n - 1/2)\pi i$ $(n \in \mathbb{Z})$.

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2020/complex2020.pdf (2014〜).