複素関数・同演習 第 11 回

～ 冪級数 (4) ～

桂田 祐史（かつらだ まさし）

2020 年 10 月 27 日

目次

1 本日の内容・連絡事項

2 冪級数 (続き)
- 一様収束 (続き)
  - 冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する
- 冪級数の項別微分
  - 冪級数の項別微分定理
  - 微分を使わない Taylor 展開

3 参考文献

本日の内容・連絡事項

- 冪級数の 4 回目。冪級数が収束円より小さい閉円盤では一様収束するという定理を述べた後、冪級数の項別微分可能性に関わる事項を説明します (講義ノート [1] の §3.3)。
- 宿題 6 を出します (締め切りは 11 月 10 日 13:30)。
- 宿題 5 の解説をします (動画公開は 10 月 27 日 13:30 以降)。

3.2.4 冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する

定理 11.1 (冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する)

$c \in \mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は複素数列, $0 \leq \rho \leq +\infty$ とする。冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径が ρ ならば、この冪級数は、$0 < R < \rho$ を満たす任意の R に対して、$\overline{D}(c;R)$ で一様絶対収束する。

3.2.4 冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する

定理 11.1 (冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する)

$c\in\mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n\ge 0}$ は複素数列, $0\le\rho\le+\infty$ とする。冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ の収束半径が ρ ならば、この冪級数は、$0<R<\rho$ を満たす任意の R に対して、$\overline{D}(c;R)$ で一様絶対収束する。

念のため記号の復習

$$D(c;R):=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-c|<R\},\quad \overline{D}(c;R):=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-c|\le R\}.$$

3.2.4 冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する

定理 11.1 (冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する)

$c\in\mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n\ge 0}$ は複素数列, $0\le\rho\le+\infty$ とする。冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n$ の収束半径が ρ ならば、この冪級数は、$0<R<\rho$ を満たす任意の R に対して、$\overline{D}(c;R)$ で一様絶対収束する。

念のため記号の復習

$$D(c;R):=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-c|<R\},\quad \overline{D}(c;R):=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-c|\le R\}.$$

注意 11.2 (広義一様収束)

「トポロジー」などで、コンパクト集合の概念を知っている人に。上の定理から「収束円 $D(c;\rho)$ 内の<u>任意のコンパクト集合上で一様収束する</u>」ことが導かれる。このことを「$D(c;\rho)$ で**広義一様収束**する (uniformly convergent on every compact set in $D(c;\rho)$)」という。この概念はとても重要であるが、この授業では上の定理の形で満足しておく。 □

3.2.4 冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する

証明

3.2.4 冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する

証明　$0 < R < r < \rho$ を満たす r を取る。$z = c + r$ で収束するから、

$$\lim_{n\to\infty} a_n r^n = \lim_{n\to\infty} a_n (z-c)^n = 0.$$

3.2.4 冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する

証明　$0 < R < r < \rho$ を満たす r を取る。$z = c + r$ で収束するから、

$$\lim_{n\to\infty} a_n r^n = \lim_{n\to\infty} a_n (z-c)^n = 0.$$

ゆえに $\{a_n r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である。すなわち、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \quad |a_n r^n| \le M.$$

3.2.4 冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する

証明　$0 < R < r < \rho$ を満たす r を取る。$z = c + r$ で収束するから、

$$\lim_{n\to\infty} a_n r^n = \lim_{n\to\infty} a_n (z-c)^n = 0.$$

ゆえに $\{a_n r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である。すなわち、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \quad |a_n r^n| \le M.$$

$b_n := M\left(\frac{R}{r}\right)^n$ とおくと、$|z-c| \le R$ をみたす任意の z に対して

$$|a_n(z-c)^n| \le |a_n| R^n = |a_n r^n| \left(\frac{R}{r}\right)^n \le M \left(\frac{R}{r}\right)^n = b_n.$$

3.2.4 冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する

証明　$0 < R < r < \rho$ を満たす r を取る。$z = c + r$ で収束するから、

$$\lim_{n\to\infty} a_n r^n = \lim_{n\to\infty} a_n (z-c)^n = 0.$$

ゆえに $\{a_n r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である。すなわち、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \quad |a_n r^n| \le M.$$

$b_n := M\left(\frac{R}{r}\right)^n$ とおくと、$|z-c| \le R$ をみたす任意の z に対して

$$|a_n(z-c)^n| \le |a_n| R^n = |a_n r^n| \left(\frac{R}{r}\right)^n \le M\left(\frac{R}{r}\right)^n = b_n.$$

そして

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \frac{M}{1 - R/r} \quad (\text{収束}).$$

3.2.4 冪級数は収束円内の任意の閉円盤で一様収束する

証明　$0 < R < r < \rho$ を満たす r を取る。$z = c + r$ で収束するから、

$$\lim_{n\to\infty} a_n r^n = \lim_{n\to\infty} a_n (z-c)^n = 0.$$

ゆえに $\{a_n r^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である。すなわち、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \quad |a_n r^n| \le M.$$

$b_n := M \left(\frac{R}{r}\right)^n$ とおくと、$|z-c| \le R$ をみたす任意の z に対して

$$|a_n(z-c)^n| \le |a_n| R^n = |a_n r^n| \left(\frac{R}{r}\right)^n \le M \left(\frac{R}{r}\right)^n = b_n.$$

そして

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \frac{M}{1-R/r} \quad (\text{収束}).$$

Weierstrass の M-test (定理 10.5) によって、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ は、$\overline{D}(c;R)$ で一様に絶対収束する。

次の定理はとりわけ重要である。

定理 11.3 (冪級数の項別微分定理, Abel)

冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径を ρ とするとき、f は $D(c;\rho)$ で正則で

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-c)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(z-c)^n \quad (z\in D(c;\rho)).$$

右辺の冪級数の収束半径は ρ である。

次の定理はとりわけ重要である。

定理 11.3 (冪級数の項別微分定理, Abel)

冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径を ρ とするとき、f は $D(c;\rho)$ で正則で

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-c)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(z-c)^n \quad (z\in D(c;\rho)).$$

右辺の冪級数の収束半径は ρ である。

微分した結果が、やはり冪級数で、その収束半径が元と一致していることに注目しよう。何回でも微分できることが導かれる。

3.3.1 冪級数の項別微分定理 (補足) 定理の証明

証明 $c = 0$ として証明すれば良い。$g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ とおく。

証明　$c = 0$ として証明すれば良い。$g(z) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ とおく。

第 1 段 $g(z)$ の収束半径が $f(z)$ の収束半径 ρ に等しいこと (授業ではスキップするかも)

まず $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ を注意しておく。

3.3.1 冪級数の項別微分定理 (補足) 定理の証明

証明　$c=0$ として証明すれば良い。$g(z):=\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ とおく。

第 1 段 $g(z)$ の収束半径が $f(z)$ の収束半径 ρ に等しいこと (授業ではスキップするかも)
まず $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ を注意しておく。(実際 $b_n:=\sqrt[n]{n}$ とおくと、$n\to\infty$ のとき
$\log b_n=\log\left(n^{1/n}\right)=\frac{\log n}{n}\to 0$ であるから、$b_n=e^{\log b_n}\to e^0=1$.)

証明　$c = 0$ として証明すれば良い。$g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ とおく。

第 1 段 $g(z)$ の収束半径が $f(z)$ の収束半径 ρ に等しいこと (授業ではスキップするかも)
まず $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ を注意しておく。(実際 $b_n := \sqrt[n]{n}$ とおくと、$n \to \infty$ のとき $\log b_n = \log\left(n^{1/n}\right) = \frac{\log n}{n} \to 0$ であるから、$b_n = e^{\log b_n} \to e^0 = 1$.)

冪級数 $g(z)$ の収束半径は、冪級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n}$ $(= zg(z))$ の収束半径と同じであるので

$$g(z) \text{ の収束半径} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \rho.$$

証明　$c = 0$ として証明すれば良い。$g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ とおく。

第 1 段 $g(z)$ の収束半径が $f(z)$ の収束半径 ρ に等しいこと (授業ではスキップするかも)
まず $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ を注意しておく。(実際 $b_n := \sqrt[n]{n}$ とおくと、$n \to \infty$ のとき
$\log b_n = \log\left(n^{1/n}\right) = \frac{\log n}{n} \to 0$ であるから、$b_n = e^{\log b_n} \to e^0 = 1$.)

冪級数 $g(z)$ の収束半径は、冪級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n}$ $(= zg(z))$ の収束半径と同じであるので

$$g(z) \text{ の収束半径} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|na_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \rho.$$

1 番目と 3 番目の等号は Cauchy-Hadamard の公式による。

3.3.1 冪級数の項別微分定理 (補足) 定理の証明

証明 $c=0$ として証明すれば良い。$g(z):=\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ とおく。

第 1 段 $g(z)$ の収束半径が $f(z)$ の収束半径 ρ に等しいこと (授業ではスキップするかも)
まず $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ を注意しておく。(実際 $b_n:=\sqrt[n]{n}$ とおくと、$n\to\infty$ のとき $\log b_n=\log\left(n^{1/n}\right)=\frac{\log n}{n}\to 0$ であるから、$b_n=e^{\log b_n}\to e^0=1$.)

冪級数 $g(z)$ の収束半径は、冪級数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n}$ $(=zg(z))$ の収束半径と同じであるので

$$g(z) \text{ の収束半径} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|na_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} = \rho.$$

1 番目と 3 番目の等号は Cauchy-Hadamard の公式による。2 番目の等号は次の (a), (b) による。

(a) 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $\sqrt[n]{n}\ge 1$ であるから、$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|na_n|}\ge\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$.

(b) 任意の $\varepsilon>0$ に対して、ある自然数 N が存在して、任意の自然数 $n\ge N$ に対して $\sqrt[n]{n}\le 1+\varepsilon$ となる。ゆえに $\limsup_{n\to\infty}\sqrt{n\,|a_n|}\le(1+\varepsilon)\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. ε は任意だから $\limsup_{n\to\infty}\sqrt{n\,|a_n|}\le\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. □

第 2 段 $f' = g$ であること　$0 < R < \rho$ を満たす任意の R に対して、f は $D(0; R)$ で正則で、$f' = g$ であることを示せば良い。

第 2 段 $f' = g$ であること　$0 < R < \rho$ を満たす任意の R に対して、f は $D(0; R)$ で正則で、$f' = g$ であることを示せば良い。

ε を任意の正数とする。($\sum_n n a_n z^{n-1}$ が $z = R$ で絶対収束ゆえ) ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$(\star) \qquad \sum_{n=N+1}^{\infty} n\left|a_n\right| R^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

第 2 段 $f' = g$ であること　$0 < R < \rho$ を満たす任意の R に対して、f は $D(0;R)$ で正則で、$f' = g$ であることを示せば良い。

ε を任意の正数とする。($\sum_n na_n z^{n-1}$ が $z = R$ で絶対収束ゆえ) ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$(\star)\qquad \sum_{n=N+1}^{\infty} n\left|a_n\right| R^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$z \in D(0;R)$, $h \neq 0$, $z + h \in D(0;R)$ とすると

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - g(z)\right| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n\left((z+h)^n - z^n\right)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}\right| \\ &\le \left|\sum_{n=1}^{N} a_n\left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - nz^{n-1}\right)\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{(z+h)^n - z^n}{h}\right| \\ &\quad + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} na_n z^{n-1}\right|.\end{aligned}$$

右辺第 1 項は、$(z^n)' = nz^{n-1}$ より、$|h|$ が十分小さければ $\frac{\varepsilon}{3}$ より小さい。

3.3.1 冪級数の項別微分定理 (補足) 定理の証明

右辺第 2 項については

$$
\begin{aligned}
|(z+h)^n - z^n| &= \left|((z+h)-z)\left((z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \cdots + z^{n-1}\right)\right| \\
&\leq |h|\left(|z+h|^{n-1} + |z+h|^{n-2}|z| + \cdots + |z|^{n-1}\right) \\
&\leq |h|\left(nR^{n-1}\right)
\end{aligned}
$$

であるから

3.3.1 冪級数の項別微分定理 (補足) 定理の証明

右辺第 2 項については

$$
\begin{aligned}
|(z+h)^n - z^n| &= \left|((z+h)-z)\left((z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \cdots + z^{n-1}\right)\right| \\
&\le |h|\left(|z+h|^{n-1} + |z+h|^{n-2}|z| + \cdots + |z|^{n-1}\right) \\
&\le |h|\left(nR^{n-1}\right)
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\text{右辺第 2 項} \le \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \frac{|(z+h)^n - z^n|}{|h|} \le \sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n| R^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}.
$$

3.3.1 冪級数の項別微分定理 (補足) 定理の証明

右辺第 2 項については

$$\begin{aligned}\left|(z+h)^n - z^n\right| &= \left|((z+h)-z)\left((z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \cdots + z^{n-1}\right)\right| \\ &\le |h|\left(|z+h|^{n-1} + |z+h|^{n-2}|z| + \cdots + |z|^{n-1}\right) \\ &\le |h|\left(nR^{n-1}\right)\end{aligned}$$

であるから

$$\text{右辺第 2 項} \le \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \frac{\left|(z+h)^n - z^n\right|}{|h|} \le \sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n| R^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

右辺第 3 項については (三角不等式, $|z| < R$, $(\star)$ により)

$$\text{右辺第 3 項} \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|na_n z^{n-1}\right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n| R^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

右辺第 2 項については

$$\begin{aligned}
\left|(z+h)^n - z^n\right| &= \left|((z+h)-z)\left((z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \cdots + z^{n-1}\right)\right| \\
&\leq |h|\left(|z+h|^{n-1} + |z+h|^{n-2}|z| + \cdots + |z|^{n-1}\right) \\
&\leq |h|\left(nR^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

であるから

$$\text{右辺第 2 項} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \frac{|(z+h)^n - z^n|}{|h|} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n| R^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

右辺第 3 項については (三角不等式, $|z| < R$, $(\star)$ により)

$$\text{右辺第 3 項} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|na_n z^{n-1}\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n| R^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

以上より、$|h|$ が十分小さければ $\left|\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h} - g(z)\right| < \varepsilon$. ゆえに $f'(z) = g(z)$.

3.3.1 冪級数の項別微分定理

系 11.4 (収束冪級数は Taylor 展開である)

収束冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の定める関数 f は収束円 $D(c;\rho)$ で無限回微分可能で

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad \text{ゆえに} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n.$$

特に関数が収束冪級数で表されるならば、表し方はただ一通りしかなく、それは Taylor 展開に一致する。

3.3.1 冪級数の項別微分定理

系 11.4 (収束冪級数は Taylor 展開である)

収束冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の定める関数 f は収束円 $D(c;\rho)$ で無限回微分可能で

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad \text{ゆえに} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n.$$

特に関数が収束冪級数で表されるならば、表し方はただ一通りしかなく、それは Taylor 展開に一致する。

証明　任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、f を k 回項別微分して

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_k(z-c)^{n-k}.$$

系 11.4 (収束冪級数は Taylor 展開である)

収束冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の定める関数 f は収束円 $D(c;\rho)$ で無限回微分可能で

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad \text{ゆえに} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n.$$

特に関数が収束冪級数で表されるならば、表し方はただ一通りしかなく、それは Taylor 展開に一致する。

証明　任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、f を k 回項別微分して

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_k(z-c)^{n-k}.$$

$z=c$ を代入すると、$n=k$ の項のみ残って

$$f^{(k)}(c) = k(k-1)\cdots 1\cdot a_k = k!a_k.$$

ゆえに $a_k = f^{(k)}(c)/k!$.

3.3.1 冪級数の項別微分定理

系 11.5 (収束冪級数は原始関数を持つ)

収束冪級数 $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ (収束半径を ρ とする) に対して、

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-c)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n}(z-c)^n \quad (z \in D(c;\rho))$$

とおくと、収束半径は同じで、$F' = f$ が成り立つ。

3.3.1 冪級数の項別微分定理

系 11.5 (収束冪級数は原始関数を持つ)

収束冪級数 $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ (収束半径を ρ とする) に対して、

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-c)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n}(z-c)^n \quad (z \in D(c;\rho))$$

とおくと、収束半径は同じで、$F' = f$ が成り立つ。

証明　$F(z)$ は z の冪級数である。その収束半径を ρ' とする。それは $F(z)$ を項別微分した冪級数の収束半径に等しい。ところが $F(z)$ を項別微分した冪級数は $f(z)$ に他ならない。ゆえに $\rho' = \rho$. そして $F'(z) = f(z)$. □

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開

上の定理から、どういうやり方でも、$f(z)$ を冪級数の形に表せれば、それは f の Taylor 展開である。

以下、等比級数の和の公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad (\text{収束する} \Leftrightarrow |r| < 1)$$

を利用した **Taylor 展開の導出法**を説明する。収束半径は ρ と表す。

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開

上の定理から、どういうやり方でも、$f(z)$ を冪級数の形に表せれば、それは f の Taylor 展開である。

以下、等比級数の和の公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad (\text{収束する} \Leftrightarrow |r| < 1)$$

を利用した **Taylor 展開の導出法**を説明する。収束半径は ρ と表す。

例 11.6 (基本)

等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

収束する $\Leftrightarrow |z| < 1$.

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開

上の定理から、どういうやり方でも、$f(z)$ を冪級数の形に表せれば、それは f の Taylor 展開である。

以下、等比級数の和の公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad (\text{収束する} \Leftrightarrow |r| < 1)$$

を利用した **Taylor 展開の導出法**を説明する。収束半径は ρ と表す。

例 11.6 (基本)

等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

収束する $\Leftrightarrow |z| < 1$. 特に $|z| < 1$ ならば収束、$|z| > 1$ ならば発散であるから、$\rho = 1$.

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開

上の定理から、どういうやり方でも、$f(z)$ を冪級数の形に表せれば、それは f の Taylor 展開である。

以下、等比級数の和の公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad (\text{収束する} \Leftrightarrow |r| < 1)$$

を利用した **Taylor 展開の導出法**を説明する。収束半径は ρ と表す。

例 11.6 (基本)

等比級数の和の公式から

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

収束する $\Leftrightarrow |z| < 1$. 特に $|z| < 1$ ならば収束、$|z| > 1$ ならば発散であるから、$\rho = 1$. これが $\dfrac{1}{1-z}$ の (0 における, 0 のまわりの) Taylor 展開に他ならない。

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開

$\dfrac{1}{z+a}$ の 0 の周りの Taylor 展開をしてみよう。ただし $a \neq 0$ とする。

例 11.7

$$\frac{1}{z+4}$$

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開

$\dfrac{1}{z+a}$ の 0 の周りの Taylor 展開をしてみよう。ただし $a \neq 0$ とする。

例 11.7

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{4+z}$$

$\dfrac{1}{z+a}$ の 0 の周りの Taylor 展開をしてみよう。ただし $a \neq 0$ とする。

例 11.7

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{4+z} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{4}}$$

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開

$\dfrac{1}{z+a}$ の 0 の周りの Taylor 展開をしてみよう。ただし $a \neq 0$ とする。

例 11.7

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{4+z} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-(-z/4)}$$

$\dfrac{1}{z+a}$ の 0 の周りの Taylor 展開をしてみよう。ただし $a \neq 0$ とする。

例 11.7

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{4+z} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-(-z/4)} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{4}\right)^n$$

$\dfrac{1}{z+a}$ の 0 の周りの Taylor 展開をしてみよう。ただし $a \neq 0$ とする。

例 11.7

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{4+z} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-(-z/4)} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{4}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} z^n.$$

$\dfrac{1}{z+a}$ の 0 の周りの Taylor 展開をしてみよう。ただし $a \neq 0$ とする。

例 11.7

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{4+z} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-(-z/4)} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{4}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} z^n.$$

収束する $\Leftrightarrow \left|\frac{-z}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|-z|}{|4|} < 1 \Leftrightarrow |z| < 4.$

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開

$\dfrac{1}{z+a}$ の 0 の周りの Taylor 展開をしてみよう。ただし $a \neq 0$ とする。

例 11.7

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{4+z} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-(-z/4)} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{4}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}z^n.$$

収束する $\Leftrightarrow \left|\frac{-z}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|-z|}{|4|} < 1 \Leftrightarrow |z| < 4$. ゆえに $\rho = 4$. 収束円は $D(0;4)$.

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開

$\dfrac{1}{z+a}$ の 0 の周りの Taylor 展開をしてみよう。ただし $a \neq 0$ とする。

例 11.7

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{4+z} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-(-z/4)} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{4}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}z^n.$$

収束する $\Leftrightarrow \left|\frac{-z}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|-z|}{|4|} < 1 \Leftrightarrow |z| < 4$. ゆえに $\rho = 4$. 収束円は $D(0;4)$.

一般化しておくと: $a \neq 0$ であれば

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a-z} = -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1-z/a} = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^{n+1}}.$$

$\rho = |a|$. 収束円は $D(0;|a|)$.

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開

$\dfrac{1}{z+a}$ の c の周りの Taylor 展開をしてみよう。ただし $a \neq -c$.

例 11.8

$\dfrac{1}{z+3}$ を 1 を中心とする冪級数に展開せよ。

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開

$\dfrac{1}{z+a}$ の c の周りの Taylor 展開をしてみよう。ただし $a \neq -c$.

例 11.8

$\dfrac{1}{z+3}$ を 1 を中心とする冪級数に展開せよ。

1 のまわりで Taylor 展開せよ、と同じことである。

$$\begin{aligned}\frac{1}{z+3} &= \frac{1}{(z-1)+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{4}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(z-1)^n.\end{aligned}$$

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開

$\dfrac{1}{z+a}$ の c の周りの Taylor 展開をしてみよう。ただし $a \neq -c$.

例 11.8

$\dfrac{1}{z+3}$ を 1 を中心とする冪級数に展開せよ。

1 のまわりで Taylor 展開せよ、と同じことである。

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{(z-1)+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{4}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1}{4} \right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} (z-1)^n.$$

$$\text{収束する} \quad \Leftrightarrow \quad \left| -\frac{z-1}{4} \right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z-1| < 4.$$

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開

$\dfrac{1}{z+a}$ の c の周りの Taylor 展開をしてみよう。ただし $a \neq -c$.

例 11.8

$\dfrac{1}{z+3}$ を 1 を中心とする冪級数に展開せよ。

1 のまわりで Taylor 展開せよ、と同じことである。

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{(z-1)+4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{4}\right)^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(z-1)^n.$$

$$\text{収束する} \quad \Leftrightarrow \quad \left|-\frac{z-1}{4}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z-1| < 4.$$

ゆえに $\rho = 4$, 収束円は $D(1;4)$.

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開

例 11.9

$f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ を 0 のまわりに Taylor 展開せよ。

例 11.9

$f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ を 0 のまわりに Taylor 展開せよ。

(♯)
$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{1-(-z^2)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-z^2)^k=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k z^{2k}.$$

これは公比 $-z^2$ の等比数列であるから、

$$\text{収束する} \quad \Leftrightarrow \quad \left|-z^2\right|<1 \quad \Leftrightarrow \quad |z|^2<1 \quad \Leftrightarrow \quad |z|<1.$$

$f(z)$ は、

$$a_n := \begin{cases} (-1)^k & (n\text{ が偶数のとき、}n=2k\text{ とおくと}) \\ 0 & (n\text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

とおくと $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ と表せるので冪級数であり、$\rho=1$.

例 11.9 (つづき)

こういうやり方もある。

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right) \\ &= -\frac{i}{2}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{i^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(-i)^{n+1}}\right) \qquad \left(\frac{1}{z-a} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^{n+1}} \text{ を使った}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(i^n + (-i)^n\right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{2} i^n z^n. \end{aligned}$$

ここで止めても良いだろう。
n が奇数のとき、$(-1)^n + 1 = 0$. $n = 2k$ のとき $i^n = i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$,
$(-1)^n + 1 = 2$ であるから、

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{2}(-1)^k z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k}.$$

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開

$\dfrac{1}{(z+a)^{n}}$ の c の周りの Taylor 展開をしてみよう。ただし $a \neq -c$.

例 11.10

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}.$$

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開

$\dfrac{1}{(z+a)^{n}}$ の c の周りの Taylor 展開をしてみよう。ただし $a \neq -c$.

例 11.10

$f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2}$.

分母の冪の指数が 1 の場合は、上でやったやり方で

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (\text{収束半径は } 1).$$

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開

$\dfrac{1}{(z+a)^{n}}$ の c の周りの Taylor 展開をしてみよう。ただし $a \neq -c$.

例 11.10

$f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2}$.

分母の冪の指数が 1 の場合は、上でやったやり方で

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (\text{収束半径は } 1).$$

両辺を微分すると (項別微分定理から)

$$-\frac{1}{(z-1)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \quad (\text{収束半径は } 1).$$

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開

$\dfrac{1}{(z+a)^{n}}$ の c の周りの Taylor 展開をしてみよう。ただし $a \neq -c$.

例 11.10

$f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2}$.

分母の冪の指数が 1 の場合は、上でやったやり方で

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (\text{収束半径は } 1).$$

両辺を微分すると (項別微分定理から)

$$-\frac{1}{(z-1)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = -\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n \quad (\text{収束半径は } 1).$$

$$\text{ゆえに} \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n \quad (\text{収束半径は } 1).$$

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開

原始関数の冪級数展開を求めてみよう (系 11.5 を使う)。

例 11.11

$f'(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$, $f(0) = 0$ を満たす f を求めよ (後で定義する $\tan^{-1} z$ に等しいが、そのことは使わない)。

原始関数の冪級数展開を求めてみよう (系 11.5 を使う)。

例 11.11

$f'(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$, $f(0) = 0$ を満たす f を求めよ (後で定義する $\tan^{-1} z$ に等しいが、そのことは使わない)。

(解答)　$f'(z)$ については既に次が分かっている。

$$f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k} \quad (\text{収束半径は } 1).$$

これから

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} + C \quad (\text{収束半径は } 1,\ C \text{ は積分定数}).$$

3.3.2 微分を使わない Taylor 展開

原始関数の冪級数展開を求めてみよう (系 11.5 を使う)。

例 11.11

$f'(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$, $f(0) = 0$ を満たす f を求めよ (後で定義する $\tan^{-1} z$ に等しいが、そのことは使わない)。

(解答)　$f'(z)$ については既に次が分かっている。

$$f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k} \quad (\text{収束半径は } 1).$$

これから

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1} + C \quad (\text{収束半径は } 1,\ C \text{ は積分定数}).$$

$f(0) = 0$ より $C = 0$. ゆえに

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1}.$$

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2020/complex2020.pdf (2014〜).