

# 複素関数・同演習 第10回

## ～冪級数 (3)～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

2020年10月21日

## 1 本日の内容・連絡事項

## 2 冪級数 (続き)

- 収束円 (残り)
  - 例の追加
- 一様収束
  - 言葉の説明: 項別積分, 項別微分
  - 半分スルーして良いイントロ
  - 各点収束, 一様収束の定義
  - 例
  - 一様収束の性質
  - Weierstrass の M test

## 3 参考文献

- 講義ノート [1] の §3.2
- 宿題 5 を出します (締め切りは 10 月 27 日 13:30)。
- 10 月 21 日 (水曜) 16:00 のオフィスアワーはお休みにするかもしれません。(風邪気味のため。お知らせに注意して下さい。)

## 例 10.1 (ratio test を使わない例)

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = z^0 + z^1 + z^4 + z^9 + z^{16} + \dots$$

$$c := 0, \quad a_n := \begin{cases} 1 & (n \text{ が平方数、すなわち } (\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\}) n = k^2 \text{ であるとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

とおくと、 $\sum_{k=0}^{\infty} z^{k^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$  である。ratio test は使えない。

$|a_n(z-c)^n| \leq |z|^n$  であり、 $|z| < 1$  のとき  $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n$  は収束するから、優級数の定理により、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$  も収束する。一方、 $|z| > 1$  のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(z-c)^n = 0$  は成り立たないので ( $\because n$  が平方数のとき  $|a_n(z-c)^n| = |z|^n > 1$ )、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$  は発散する。ゆえに収束半径は 1。□

別解 (Cauchy-Hadamard の公式利用) 数列  $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}_{n \in \mathbb{N}}$  は、1, 0 という 2 つの集積点を持ち、そのうちの大きい方 1 が上極限である。ゆえに収束半径は  $1/1 = 1$ 。

## 3.2 一様収束 3.2.0 言葉の説明: 項別積分, 項別微分

簡単のため、 $\mathbb{R}$  の区間  $[a, b]$  上で定義された関数列  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  (つまり、任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、 $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ) について述べる。

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

が成り立つとき、**項別積分可能**であるという。(つまり  $\lim$  と積分の順序交換)

**注**  $f_n = \sum_{k=1}^n a_k$  のような級数の場合は  $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n(x) dx$ .

一方

$$\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

が成り立つとき、**項別微分可能**という。(つまり  $\lim$  と微分の順序交換)

**注** 級数の場合は  $\left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ .

## 3.2.1 半分スルーして良いイントロ

冪級数の微分・積分を扱うのに、単なる各点収束では不十分である。一様収束が便利。

以下スルー可能

(参考) 関数論である程度話が進むと、「広義一様収束 (まだ紹介していない) が便利」と分かって、冪級数の項別積分、項別微分も、次のように理解できる。

- Ⓐ 冪級数は収束円を広義一様収束する。— 比較的簡単
- Ⓑ 正則関数列が広義一様収束すれば、(線積分においても) 項別積分出来る。— 比較的簡単
- Ⓒ 正則関数列が広義一様収束すれば、極限関数は正則で、項別微分も出来る。— 証明には Cauchy の積分公式が必要

しかし Cauchy の積分公式の証明が出来るのはずっと先であるし、初学者にいきなり「広義一様収束」はやや難しいと思われるので、ここでは (次回) 次のように話を進める。

- Ⓐ 冪級数は、収束円  $D(c; \rho)$  内の任意の閉円盤  $\overline{D}(c; R)$  で一様収束する。  
(一般論により、一様収束するならば極限は連続で、項別積分出来る。)
- Ⓑ 「冪級数は収束円  $D(c; \rho)$  内で何回でも項別微分できる」を直接証明する。

(余談: Fourier 解析でも、各点収束、一様収束、 $L^2$  収束、と色々な収束が出て来て、 $L^2$  収束がかなり有効である。関数論では、広義一様収束がエライ。)

## 3.2.2 各点収束, 一様収束の定義

### 定義 10.2 (各点収束, 一様収束)

$\Omega$  は空でない集合、 $\{f_n\}_n$  は各  $n$  に対して  $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  とする。

- ①  $\{f_n\}$  が  $f$  に  $\Omega$  で ( $\Omega$  上) **各点収束** (単純収束) するとは、

$$(\forall z_0 \in \Omega) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_0) = f(z_0)$$

が成り立つことをいう。

- ②  $\{f_n\}$  が  $f$  に  $\Omega$  で ( $\Omega$  上) **一様収束** するとは、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)| = 0$$

が成り立つことをいう。

## 3.2.2 各点収束, 一様収束の定義

- ( $\Omega$  が  $\mathbb{R}$  の区間であるとき、グラフを用いた説明)

$\sup_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)|$  は  $f_n$  と  $f$  の距離のようなもの、それが 0 に収束するとい  
うことで、一様収束は自然な概念である。

- 一般に「 $\{f_n\}$  が  $f$  に一様収束するならば、 $\{f_n\}$  は  $f$  に各点収束する」が成  
り立つ。実際、任意の  $z_0 \in \Omega$  に対して

$$|f_n(z_0) - f(z_0)| \leq \sup_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_0) = f(z_0)$  が成り立つ。

しかし、逆「各点収束するならば一様収束する」は一般には成り立たない。

## 3.2.3 例

### 例 10.3 (各点収束するが一様収束はしない)

$$f_n(x) := \begin{cases} nx + 1 & (x \in [-1/n, 0)) \\ 1 - nx & (x \in [0, 1/n]) \\ 0 & (x \in [-1, 1] \setminus [-1/n, 1/n]), \end{cases} \quad f(x) := \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 0 & (x \neq 0). \end{cases}$$

グラフを描いてみると

$$(\forall x \in [-1, 1]) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

( $x = 0$  のとき両辺 = 1.  $x \neq 0$  のとき、 $n \geq \frac{1}{|x|} \Rightarrow f_n(x) = 0$  に注意する。)

ゆえに  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は  $f$  に  $[-1, 1]$  で各点収束する。

## 3.2.3 例

### 例 10.3 (各点収束するが一樣収束はしない (続き))

一方

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \not\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

ゆえに  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は  $f$  に  $[-1, 1]$  で一樣収束はしない。

一方

$$\int_{-1}^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot 1 = \frac{1}{n} \rightarrow 0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから、項別積分可能である。

各  $f_n$  は連続関数であるが、極限  $f$  は不連続関数である。 □

## 3.2.3 例

### 例 10.4 (一様収束する)

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}(x+1) & (x \in [-1, 0)) \\ \frac{1}{n}(1-x) & (x \in [0, 1]) \\ 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]), \end{cases} \quad f(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

グラフを描いてみると

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [-1, 1]} f_n(x) = f_n(0) = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-1, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

ゆえに  $\{f_n\}$  は  $f$  に  $[-1, 1]$  で一様収束する。ゆえに  $\{f_n\}$  は  $f$  に  $[-1, 1]$  で各点収束する。また項別積分も可能である。直接次のようにも確かめられる:

$$\int_{-1}^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 = \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

## 3.2.4 一様収束の性質

一様収束する関数列は、色々良い性質を持つ。ここでは3つ述べるが、最初の2つが関数論で重要である。(3つ目は、関数論の場合、もっと便利な定理が成り立つので、使われない。)

Cf. 絶対収束する級数では、和を取る順序を変更しても和は変わらない、という定理など、色々便利なことが成り立つ。

## 3.2.4 一様収束の性質

簡単のため、まず  $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$ , 各  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  連続,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は  $f$  に  $\Omega$  で一様収束する、という場合を説明する。

結果だけを覚えるよりも証明まで覚えてしまうことを勧める。

- ①  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が  $\Omega$  で  $f$  に一様収束するならば、 $f$  は  $\Omega$  で連続である。  
(証明):  $x_0 \in \Omega$  とする。  $\varepsilon$  を任意の正の数とすると、 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が  $f$  に一様収束することから、ある自然数  $N \in \mathbb{N}$  が存在して

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$f_N$  は  $x_0$  で連続であるから、ある  $\delta > 0$  が存在して

$$(\forall x \in \Omega : |x - x_0| < \delta) \quad |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

すると  $|x - x_0| < \delta$  を満たす任意の  $x \in \Omega$  に対して

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq 2 \sup_{x' \in \Omega} |f(x') - f_N(x')| + |f_N(x) - f_N(x_0)| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

ゆえに  $f$  は  $x_0$  で連続である。 □

## 3.2.4 一様収束の性質

- ② 一様収束するならば項別積分出来る、すなわち  $\lim$  と  $\int$  の順序交換出来る。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \left( \text{i.e. } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \right).$$

(証明) (1) より、 $f$  は連続であることに注意しよう。

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_a^b \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| dx \\ &= \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| \int_a^b dx \\ &= (b - a) \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

であるから  $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ . □

## 3.2.4 一様収束の性質

- ⑨ 各  $n$  について  $f_n$  が  $C^1$  級で、 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は  $f$  に各点収束し、 $\{f'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  はある関数  $g$  に  $\Omega$  で一様収束するならば、 $f$  も  $C^1$  級で  $f' = g$ . すなわち

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

(証明) 微積分の基本定理により、任意の  $x \in [a, b]$  に対して

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt.$$

$n \rightarrow \infty$  とすると ( $f'_n$  が  $g$  に一様収束するので、(2) を使って)

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt.$$

右辺は微分可能で、微分係数は  $g(x)$ . ゆえに  $f$  も微分可能で  $f'(x) = g(x)$ . これは連続であるから  $f$  は  $C^1$  級である。 □

(この定理は、証明の方が覚えやすいかもしれない。)

## 3.2.4 一様収束の性質

(実関数列の一様収束について説明したわけだが)

複素関数ではドーナル？

- ① 「一様収束する連続関数列の極限は連続」…同様に証明できる。  
系として冪級数の和は連続である。
- ② 「一様収束するならば項別積分可能」…まだ複素線積分を定義していない訳であるが、同様に証明できる。
- ③ 実は**もっと本質的に強い定理**がある。  
(3改) 「各  $f_n$  が正則で、 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  が  $f$  に広義一様収束するならば、 $f$  は正則で  $f' = \lim_{n \rightarrow \infty} (f'_n)$ 」

(このことの証明には、Cauchy の積分公式が必要で、証明出来るのはずっと後になる。それまで待てないので、冪級数については、もっと直接的に証明することにする。) ということで、関数論のテキストでは、上の (3) はスルーするのが普通である。

## 3.2.5 Weierstrass の M test

関数項級数の一様収束を証明するには、大抵 (95%以上?) は次の定理を用いる。

### 定理 10.5 (Weierstrass の M-test)

$\Omega$  は空でない集合、 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は  $\Omega$  上の関数列 (各  $n \in \mathbb{N}$  に対して、 $a_n: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ )、数列  $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は

$$(i) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) (\forall z \in \Omega) |a_n(z)| \leq M_n$$

$$(ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{ は収束}$$

を満たすとする。このとき、 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  と  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は  $\Omega$  で一様収束する。

結論部分を「 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は  $\Omega$  で一様絶対収束する」という人が多い。特に  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は一様収束

するし (項別積分出来る)、各点  $z$  で  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z)$  は絶対収束する (和の順序が変えられる)。

## 3.2.5 Weierstrass の M test 証明 前半

**証明** (定理は優級数の定理に似ているが、証明も優級数の定理の証明のバージョンアップみたい。優級数の定理 Ver. 2 と言いたいくらい。)

$$s_n(z) := \sum_{k=1}^n a_k(z), \quad S_n(z) := \sum_{k=1}^n |a_k(z)|, \quad T_n := \sum_{k=1}^n M_k$$

とおく。任意の  $z \in \Omega$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  に対して次式が成り立つ。

$$(*) \quad |s_n(z) - s_m(z)| \leq |S_n(z) - S_m(z)| \leq |T_n - T_m|$$

$n > m$  のときに証明すれば良い。次の3つの式から導かれる。

$$|s_n(z) - s_m(z)| = \left| \sum_{k=1}^n a_k(z) - \sum_{k=1}^m a_k(z) \right| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k(z) \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k(z)|.$$

$$\sum_{k=m+1}^n |a_k(z)| = \sum_{k=1}^n |a_k(z)| - \sum_{k=1}^m |a_k(z)| = S_n(z) - S_m(z) = |S_n(z) - S_m(z)|,$$

$$\sum_{k=m+1}^n |a_k(z)| \leq \sum_{k=m+1}^n M_k = \sum_{k=1}^n M_k - \sum_{k=1}^m M_k = T_n - T_m = |T_n - T_m|.$$

## 3.2.5 Weierstrass の M test 証明 後半

仮定より  $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は収束列なので、Cauchy 列である。ゆえに (\*) により  $\{S_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\{s_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$  も Cauchy 列であるから、 $\mathbb{C}$  の完備性によって収束する。

$$s(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z), \quad S(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) \quad (z \in \Omega),$$
$$T := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$$

とおく。

(再掲\*) 
$$|s_n(z) - s_m(z)| \leq |S_n(z) - S_m(z)| \leq |T_n - T_m|$$

で  $m \rightarrow \infty$  とすると

$$(\forall z \in \Omega)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |s_n(z) - s(z)| \leq |S_n(z) - S(z)| \leq |T_n - T|.$$

$z \in \Omega$  について上限を取って (細かいことを言うと  $(\forall z \in \Omega)(\forall n \in \mathbb{N})$  の順番を入れ替えてから)

$$\sup_{z \in \Omega} |s_n(z) - s(z)| \leq \sup_{z \in \Omega} |S_n(z) - S(z)| \leq |T_n - T|.$$

$n \rightarrow \infty$  のとき右辺は 0 に収束するので、 $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は  $S$  に、 $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  は  $s$  に、それぞれ  $\Omega$  で一様収束する。 □

# 参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2020/complex2020.pdf> (2014～).