

複素関数・同演習第9回

～ 冪級数 (2) ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2020年10月20日

1 本日の内容・連絡事項

2 冪級数 (続き)

● 収束円 (続き)

- Cauchy-Hadamard の公式
- ratio test
- 例
- 埋め草

3 参考文献

- 今週は (明日の複素関数演習で) 宿題 5 を出します (締め切りは 10 月 27 日 13:30)。
- 本日は宿題 4 の解説をします。
- 本日は収束半径の求め方 (講義ノート [1] の §3.1 の後半) を解説します。この話は実は難しい話が色々あるけれど、それには深入りせず、ほどほどのところで切り上げます。

3.1 収束円 3.1.2 Cauchy-Hadamard の公式

与えられた冪級数に対して、どのように収束半径を求めるかが問題となる。ある意味で究極の解答がある。使うのが難しいので推奨しないが、紹介はしておく。

定理 9.1 (Cauchy-Hadamard の公式 (判定法))

べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径 ρ は、 $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$ という約束の元で

$$(1) \quad \rho = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

ここで \limsup は上極限を表す。

- 任意の $\{a_n\}$ に対して、 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ が確定するので、すべての冪級数に対して公式 (1) が適用できる。これは大きな長所である。
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ をどうやって求めるかは問題として残る。この講義では、 \limsup を求める練習に時間をかけられないので、この定理を使わない方法を推奨することにする。

3.1.2 Cauchy-Hadamard の公式

一応 \limsup (上極限) の定義を書いておく。簡単な場合は、定義から $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ がすぐ求められるかもしれない。

上極限の定義

$\{a_n\}$ を実数列, $\lambda \in \mathbb{R}$ とする。 $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lambda$ とは、次の2条件を満たすことをいう。

- ① $(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) (\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N) a_n < \lambda + \varepsilon$.
これは十分大きい任意の n に対して $a_n < \lambda + \varepsilon$ が成り立つ、ということ。
- ② $(\forall \varepsilon > 0) (\forall N \in \mathbb{N}) (\exists n \in \mathbb{N}: n \geq N) a_n > \lambda - \varepsilon$.
これは $a_n > \lambda - \varepsilon$ を満たす n は無限個ある、ということ。

- $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ とは、任意の $U \in \mathbb{R}$ に対して、 $a_n > U$ を満たす n が無限個存在する、ということ。
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ とは、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ を満たす、ということ。

上極限について、詳しいことが知りたければ、例えば杉浦 [2] V.1 を見よ。

3.1.2 Cauchy-Hadamard の公式

Cauchy-Hadamard の公式の簡略化バージョンを掲げておく。

系 9.2 (Cauchy-Hadamard の公式 簡略版)

べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ が確定 (収束または $+\infty$ に発散)

するならば、収束半径 ρ は、 $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$ という約束の元で

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

証明 「 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ が確定すれば $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ 」が成り立つ (これは簡単に確認できる) から。 □

今後、収束半径の議論をしているとき、つねに

$$\frac{1}{0} = +\infty, \quad \frac{1}{+\infty} = 0$$

と約束していることにする。

3.1.3 ratio test

多くの場合、次の定理を使って収束半径が求められる。

定理 9.3 (d'Alembert の判定法, ratio test)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ が確定するならば、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径は $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ 。

証明 $c=0$ の場合に証明すれば良い。

$\rho := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ とおく。 $|z| < \rho$ ならば収束し、 $|z| > \rho$ ならば発散することを示す。

z が $|z| < \rho$ を満たすとする。 $|z| < R < \rho$ となる R をとる。

ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、 $(\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N) \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| > R$ が成り立つ。

この条件を満たす N を一つとる。 $m \geq 0$ とするとき

$$\left| a_{N+m} z^{N+m} \right| = \left| a_N \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdots \frac{a_{N+m}}{a_{N+m-1}} z^N z^m \right| \leq \left| a_N z^N \right| \left(\frac{|z|}{R} \right)^m.$$

言い換えると任意の $n \geq N$ に対して

$$\left| a_n z^n \right| \leq \left| a_N z^N \right| \left(\frac{|z|}{R} \right)^{n-N}.$$

3.1.3 ratio test

そこで

$$b_n := \begin{cases} |a_n z^n| & (0 \leq n \leq N-1) \\ |a_N z^N| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N} & (n \geq N) \end{cases}$$

とおくと、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $|a_n z^n| \leq b_n$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n z^n| + \frac{|a_N z^N|}{1 - |z|/R} \quad (\text{収束}).$$

優級数の定理より $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束する。

一方、 $|z| > \rho$ とする。 $|z| > R > \rho$ となる R をとる。

ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $(\forall n \in \mathbb{N}: n \geq N) \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| < R$ が成り立つ。

上と同様にして、任意の $n \geq N$ に対して

$$|a_n z^n| \geq |a_N z^N| \left(\frac{|z|}{R}\right)^{n-N}.$$

ゆえに $a_n z^n$ は 0 に収束しないので、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は発散する。

以上から、 ρ は収束半径である。

3.1.4 例

収束半径を求める例をいくつか示す。

冪級数の中心を c , 係数を a_n , 収束半径を ρ と表すことにする。

例 9.4 (最も基本的で重要な冪級数 — 等比級数)

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. $\rho = 1$. 収束円は $D(0; 1)$.

これは色々なやり方で証明できる。

- (既出) 公比 z の等比級数なので、収束 $\Leftrightarrow |z| < 1$. 特に $|z| < 1$ ならば収束、 $|z| > 1$ ならば発散する。ゆえに収束半径は 1 である。

$c = 0$, $a_n = 1$ である。

- $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ であるから、Cauchy-Hadamard の判定法により $\rho = \frac{1}{1} = 1$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ であるから、ratio test により $\rho = 1$.

3.1.4 例

上の例を少しだけ一般化してみる。

例 9.5 (等比級数)

$c_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ とするとき、 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - c_0}{R} \right)^n$.

$c = c_0$, $a_n = \frac{1}{R^n}$ である。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R^{n+1}}{R^n} = R.$$

ゆえに ratio test より $\rho = R$. 収束円は $D(c_0; R)$.

(別解) これは公比が $\frac{z - c_0}{R}$ の等比級数であるから、収束 $\Leftrightarrow \left| \frac{z - c_0}{R} \right| < 1 \Leftrightarrow |z - c_0| < R$. ゆえに ($|z - c_0| < R$ で収束、 $|z - c_0| > R$ で発散するので) 収束半径は R . 収束円は $D(c_0; R)$.

3.1.4 例

例 9.6

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$. このとき $c = 0$, $a_n = \frac{1}{n^2}$ ($n \in \mathbb{N}$) である。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = (1+0)^2 = 1.$$

ゆえに ratio test より $\rho = 1$. 収束円は $D(0; 1)$.

例 9.7

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$. このとき $c = 0$, $a_n = n^2$ ($n \in \mathbb{N}$) である。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+1/n)^2} = \frac{1}{(1+0)^2} = 1.$$

ゆえに ratio test より $\rho = 1$. 収束円は $D(0; 1)$.

3.1.4 例

例 9.8

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$. このとき $c = 0$, $a_n = \frac{1}{n!}$ ($n \in \mathbb{N}$) である。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = +\infty.$$

ゆえに ratio test より $\rho = +\infty$. 収束円は \mathbb{C} .

例 9.9

$\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$. このとき $c = 0$, $a_n = n!$ ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) であるので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

ゆえに ratio test より $\rho = 0$. 収束円は \emptyset .

3.1.4 例

(簡単なまとめ)

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径は同じ。収束円の中心が c , 0 という違いがある。
- k を定数とするとき、 $\sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n$ の収束半径は、 k が何であっても 1 。
- $c \neq 0$ とするとき、 $\sum_{n=0}^{\infty} c^n z^n$ の収束半径は $\frac{1}{|c|}$ 。
- $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ の収束半径はそれぞれ 0 , $+\infty$ 。

3.1.4 例

例 9.10

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{n} (z-1)^n.$$

このとき $c = 1$, $a_n = \frac{(-2)^{n-1}}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$), $a_0 = 0$ である。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(-2)^{n-1}/n|}{|(-2)^n/(n+1)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

ゆえに ratio test より $\rho = \frac{1}{2}$. 収束円は $D(1; 1/2)$.

3.1.4 例 特にマスターして欲しい例

例 9.11

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$. (実は $\sin z$ の Taylor 展開だがそのことは使わない)。

$$c = 0, \quad a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} & (n \text{ は奇数, } k \text{ を } n = 2k + 1 \text{ で定めて}) \\ 0 & (n \text{ は偶数}). \end{cases}$$

$a_n = 0$ となる n が無限個あるので、d'Alembert の公式は直接は使えない。
 $\zeta := z^2$ とおくと^a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \zeta^k.$$

^a共通因数 z をくり出したわけだが、「一般に級数の一般項に (0 以外の) 定数をかけることで収束発散は変わらない」ことに注意すると、収束する場合も、収束しない場合も正しいことが分かる。

3.1.4 例 特にマスターして欲しい例

例 9.11 (つづき)

そこで

$$(*) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \zeta^k$$

の収束発散が問題となる。

$$b_k := \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

とおくと $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{b_k}{b_{k+1}} \right| = +\infty$ であることは簡単に分かる。ゆえに $(*)$ の収束半径は $+\infty$. ゆえに $(*)$ は任意の $\zeta \in \mathbb{C}$ に対して収束する。

ゆえに元の級数は、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して収束する。ゆえに $\rho = +\infty$.

3.1.4 例 特にマスターして欲しい例

例 9.11 (別解)

Cauchy-Hadamard の公式の簡略版 (系 9.2) を使って示すことも出来る。

$$0 \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \quad (n \text{ が奇数のとき等号成立})$$

という評価が成り立ち、実は

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty \quad (\text{次のスライドで証明})$$

であるから、はさみうちの原理により $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ 。ゆえに系 9.2 の公式から、 $\rho = \frac{1}{0} = +\infty$ である。

3.1.5 埋め草 (やや難しい, 授業ではカット?)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ を示すことが残っている。

これを示すには、**Stirling の公式**

$$(3) \quad \log n! \sim n \log n - n + O(\log n)$$

を使うという方法がある。それ以外に、次のような初等的な方法もある。

$$n! = \prod_{k=1}^n k = \prod_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} k \cdot \prod_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^n k \geq \prod_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} 1 \cdot \prod_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^n \lfloor n/2 \rfloor \geq (\lfloor n/2 \rfloor)^{n - \lfloor n/2 \rfloor + 1} \geq \lfloor n/2 \rfloor^{n/2}$$

であるから ($\lfloor \]$ は整数部分を表す)、

$$\sqrt[n]{n!} \geq \left(\lfloor n/2 \rfloor^{n/2} \right)^{1/n} = \sqrt{\lfloor n/2 \rfloor} \rightarrow +\infty.$$

(計算の要点は、 $A_n = \frac{1}{n!}$ について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{A_{n+1}} = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_n} = 0$ が成り立つ、ということであるが、多くの人には、後者の計算は難しく感じられるのではないだろうか。まあ、覚えてしまうという手はあるけれど。

Cauchy-Hadamard の公式は「究極の公式」であるが、使うためには覚えるべきことがたくさんあって、使いやすいかどうかは別問題であると思う。)

3.1.5 埋め草

以下の2つの命題も知っておくと、Cauchy-Hadamard の公式が使いやすいかもしれない。

定理 9.12

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

証明は簡単なので (?), 各自に任せる。

定理 9.13

$\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は非負実数からなる数列、 $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, A は \mathbb{N} の無限部分集合で、次の2条件を満たすとする。

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lambda.$
- (ii) $(\forall n \in A) p_n = q_n.$
- (iii) $(\forall n \in \mathbb{N} \setminus A) p_n \leq \lambda.$

このとき $\limsup_{n \rightarrow \infty} p_n = \lambda.$

証明は簡単なので、各自に任せる。

次にこの命題を用いる例を紹介するが、この命題を用いるよりも簡単な別解がある。

3.1.5 埋め草

例 9.14

z を変数とする級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n^2}$ を考える。

これは、 $c = 0$, $a_n := \begin{cases} 1 & (n \text{ が平方数、すなわち } (\exists k \in \mathbb{N}) n = k^2 \text{ が成り立つとき}) \\ 0 & (n \text{ が平方数でないとき}) \end{cases}$

とおくと $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n$ と表せるので、 z の冪級数である。実は収束半径は 1 である。

証明 1 Cauchy-Hadamard の判定法を使ってみよう。

$$p_n := \sqrt[n]{|a_n|}, \quad q_n := 1 \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \lambda := 1,$$

$$A := \left\{ n \in \mathbb{N} \mid (\exists k \in \mathbb{N}) n = k^2 \right\} \quad (\text{平方数の全体})$$

とおくとき、定理 9.13 の条件が満たされる。実際、 $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lambda$, $(\forall n \in A) p_n = q_n$,
 $(\forall n \in \mathbb{N} \setminus A) p_n = 0 \leq \lambda$.

ゆえに $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda = 1$. ゆえに $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2}$ の収束半径は $\frac{1}{1} = 1$ である。

3.1.5 埋め草

例 9.14 (つづき)

証明 2 $|z| < 1$ ならば収束し (例えば優級数の定理)、 $|z| \geq 1$ ならば発散する (一般項 $z^{n^2} \rightarrow 0$ ではないから)。ゆえに収束半径は 1 である。 □

3.1.5 埋め草

例 9.15

$A_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ のとき $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = 1$. この数列は $1, -1$ に「集積する」。実は「数列の上極限は、数列の集積点 (授業では定義していない) のうちで最大のもの」である。

3.1.5 埋め草

定理 9.16 (Cauchy-Hadamard)

正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ において、 $\lambda := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ とおくととき、

- ① $0 \leq \lambda < 1$ ならば $\sum a_n$ は収束する。
- ② $\lambda > 1$ ($\lambda = +\infty$ も含む) ならば $\sum a_n$ は発散する。

証明

- ① $0 \leq \lambda < 1$ とする。 $\lambda < \mu < 1$ となる μ を (任意に) 1つ選ぶ。定義から

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N) \quad \sqrt[n]{a_n} < \mu.$$

ゆえに $n \geq N$ のとき $a_n < \mu^n$ が成り立つ。

$$b_n := \begin{cases} a_n & (1 \leq n \leq N-1) \\ \mu^n & (n \geq N) \end{cases}$$

とおくと、 $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \leq b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \frac{\mu^N}{1-\mu}$. 優級数定理により $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

3.1.5 埋め草

② (ここでは簡単に) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ でないことが分かる。ゆえに $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しない。 \square

この定理から、冪級数の収束半径に関する Cauchy-Hadamard の公式 (定理 9.1) の証明は難しくない。

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(z - c)^n|} = |z - c| \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

これが < 1 ならば収束し、 > 1 ならば発散する。ゆえに収束半径は $\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ 。 \square

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2020/complex2020.pdf> (2014～).
- [2] 杉浦光夫：解析入門 I, 東京大学出版会 (1980), <https://elib.maruzen.co.jp/elib/html/BookDetail/Id/3000046843>
この eBook まともな目次を付けてほしい.