

# 複素関数・同演習 第8回

## ～冪級数(1)～

かつらだ まさし  
桂田 祐史

2020年10月14日

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 冪級数
  - イントロ
  - 収束円
    - 収束円の存在
- 3 参考文献

## 本日の内容・連絡事項

- 宿題 4 を出します (締め切りは 10 月 20 日 13:30)。
- 今回は問 3 の解説をします (問 2 の解説は 10 月 13 日の複素関数で行いました)。
- 冪級数 (講義ノート [1] の §3) の解説を始めます。授業 6,7 回程度の時間がかかる長い話で、最初のうちは「知っている」はずのこともあるけれど、新しいことがたくさん出て来ます。

### 3 冪級数

いよいよ冪級数について調べ始める。冪級数は、微積分でも大きな話題であったが、**複素関数の範疇で考えることでその本質が浮き彫りにされる。**

**ベキ冪級数**とは、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$  の形の級数のことをいう。(ここで  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  は複素数列、 $c$  は複素数である。)

**雑談** 「冪」は、わかんむり「冪」に幕府の「幕」からなる漢字だが、しばしば「巾」と略される。個人的に「巾」が嫌いであるが、「冪」と書くのは面倒だし、見にくいので、「板書では「ベキ」とカタカナで通す」と例年言っている。今年度はスライドなので「冪」「ベキ」が混じるかも。

宿題でも「ベキ」と書いても構わない。

ベキ級数の話はかなり長くなるので、この節で何が分かるか、少し長めのイントロを用意した。

## 3.1 イントロ

「解析的 (analytic)」、「解析関数」という言葉がある。

**解析的**  $\stackrel{\text{def.}}{=} 定義域の各点の近傍で収束するべき級数に展開できる$

「解析関数」を**解析的な関数**という意味にとると、実は「正則関数」と同じ意味であることが後で分かる (**正則  $\Leftrightarrow$  解析的**)。一方で「解析関数」という言葉は、少し違った意味 (**解析接続で定まる関数**など) で使われることもある。

いくつか事実を述べる。

- ① 高校生の知っている関数 (多項式関数, 有理関数,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$ ,  $e^x$ ,  $\log(1+x)$ ,  $(1+x)^\alpha$ ) はほとんどが Taylor 展開可能である (例外は  $|x|$  とか)。つまり  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  に対して

$$(\forall c \in I)(\exists \varepsilon > 0) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n \quad (|x-c| < \varepsilon).$$

これはべき級数である (「**Taylor 展開は冪級数**」)。ゆえに  $f$  は解析的 (実解析的) である。

$x$  を複素変数  $z$  に置き換えると複素関数に拡張できる。それらは解析的 (かつ正則) である。

## 3.1 イントロ

②  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$  について: “収束円” が存在する。

$(\exists \rho: 0 \leq \rho \leq +\infty) (|z-c| < \rho \Rightarrow \text{収束}) \wedge (|z-c| > \rho \Rightarrow \text{発散})$

$\rho$  を**収束半径**、 $D(c; \rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < \rho\}$  を**収束円**とよぶ。

$\rho = 0$  のとき  $D(c; \rho) = \emptyset$ ,  $\rho = +\infty$  のとき  $D(c; \rho) = \mathbb{C}$ .

(円というときは、ふつうは  $0 < \rho < +\infty$  であるが)

$\rho > 0$  のとき**収束べき級数**という。

収束円の内部ではかなり自由な演算が出来る。とても簡単 (多項式関数とあまり変わらない)。

Ⓐ **項別微分出来る**。

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-c)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1}(z-c)^n.$$

冪級数は**収束円  $D(c; \rho)$  内で正則**。ゆえに「**解析的ならば正則**」。

## 3.1 イントロ

- ② 項別積分が出来る。後で曲線  $C$  に沿う線積分  $\int_C f(z) dz$  を導入するが、収束円  $D(c; \rho)$  内の曲線  $C$  (始点  $a$ , 終点  $b$  として) に対して

$$\int_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z-c)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[ \frac{(z-c)^{n+1}}{n+1} \right]_{z=a}^{z=b}.$$

- ③ 正則関数はベキ級数展開出来る (「正則ならば解析的」)。  
つまり  $\Omega$  が  $\mathbb{C}$  の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  正則とするとき、任意の  $c \in \Omega$  に対して、ある  $\varepsilon > 0$  が存在して  $D(c; \varepsilon) \subset \Omega$  が成り立つが、このとき

$$(\exists! \{a_n\}_{n \geq 0}) (\forall z \in D(c; \varepsilon)) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n.$$

( $\exists!$  は一意的に存在することを表す記号)

(ベキ級数の収束半径  $\rho$  は  $\rho \geq \varepsilon$  を満たす、ということになる。)

この節では、主に (2) の証明を目標にする。(3) を証明するにはたくさんの準備が必要で、証明するのは少し後になる。

## 3.2 収束円 3.2.1 収束円の存在

補題 8.1 (ある点で収束すれば、より中心に近い任意の点で収束する)

べき級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$  が  $z = z_0$  で収束するならば、 $|z-c| < |z_0-c|$  を満たす任意の  $z \in \mathbb{C}$  で収束する。

**証明**  $z_0 = c$  のとき  $|z-c| < |z_0-c|$  を満たす  $z$  が存在しないので証明不要。  
 $z_0 \neq c$  として示す。級数が収束するので一般項は 0 に収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(z_0 - c)^n = 0.$$

ゆえに

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \quad |a_n(z_0 - c)^n| \leq M.$$

$b_n := M \left| \frac{z-c}{z_0-c} \right|^n$  とおくと、 $|z-c| < |z_0-c|$  を満たす  $z$  に対して

$$|a_n(z-c)^n| = |a_n(z_0-c)^n| \left| \frac{(z-c)^n}{(z_0-c)^n} \right| \leq M \left| \frac{z-c}{z_0-c} \right|^n = b_n.$$

$\{b_n\}$  は公比  $\left| \frac{z-c}{z_0-c} \right| < 1$  の等比数列であるから、 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  は収束する。優級数の定理から

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$  は収束する。 □



## 3.2.1 収束円の存在

### 定理 8.2 (優級数の定理)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  に対して (i)  $(\forall n \in \mathbb{N}) |a_n| \leq b_n$  (ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  は収束する  
を満たす  $\{b_n\}$  が存在すれば、 $\sum a_n$  は絶対収束する。(ゆえに  $\sum a_n$  は収束する。)

証明

$$S_n := \sum_{k=1}^n |a_k|, \quad T_n := \sum_{k=1}^n b_k$$

とおく。  $n > m$  のとき

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=1}^n |a_k| - \sum_{k=1}^m |a_k| \right| = \left| \sum_{k=m+1}^n |a_k| \right| \leq \sum_{k=m+1}^n b_k = T_n - T_m = |T_n - T_m|.$$

$n, m$  の大小関係によらず  $|S_n - S_m| \leq |T_n - T_m|$  が成り立つことが分かる。ゆえに

$$\sum b_n \text{ が収束} \Leftrightarrow \{T_n\} \text{ が収束} \Leftrightarrow \{T_n\} \text{ が Cauchy 列}$$

$$\Rightarrow \{S_n\} \text{ が Cauchy 列} \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ が収束} \Leftrightarrow \sum |a_n| \text{ が収束}$$

$$\Rightarrow \sum a_n \text{ が収束. } \square$$

## 3.2.1 収束円の存在

上の最後の  $\Rightarrow$  で使った「絶対収束するならば収束」は「常識」だけれど、その証明自身が優級数の定理の証明とよく似ているので、証明してみよう。

### 定理 8.3 (級数が絶対収束するならば収束する)

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を複素数列とする。  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  が収束するならば、  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  は収束する。

**証明**  $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ ,  $S_n := \sum_{k=1}^n |a_k|$  とおく。  $n > m$  ならば

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^m a_k \right| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| = S_n - S_m = |S_n - S_m|.$$

$m > n$  ならば (途中同様にして)  $|s_n - s_m| = |s_m - s_n| \leq S_m - S_n = |S_n - S_m|$ .  
ゆえに一般に  $|s_n - s_m| \leq |S_n - S_m|$  が成り立つ。ゆえに

$$\sum |a_n| \text{ が収束} \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ が収束} \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ が Cauchy 列}$$

$$\Rightarrow \{s_n\} \text{ が Cauchy 列} \Leftrightarrow \{s_n\} \text{ が収束} \Leftrightarrow \sum a_n \text{ が収束.} \quad \square$$

## 3.2.1 収束円の存在

補題 8.1 を思い出すと

$|z_1 - c| < |z_0 - c|$  とする。級数が  $z_0$  で収束するならば、 $z_1$  でも収束する。  
収束する点より (冪級数の中心から見て) 近い点では収束する

対偶を取ると

$|z_1 - c| < |z_0 - c|$  とする。級数が  $z_1$  で発散するならば、 $z_0$  でも発散する。

定理の形にしておく。

系 8.4 (ある点で発散すれば、より中心から遠い任意の点で発散する)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - c)^n$  が  $z = z_1$  で発散するならば、 $|z - c| > |z_1 - c|$  を満たす任意の  $z$  に対して発散する。

以上の準備のもと、収束円の存在定理を証明する。

## 3.2.1 収束円の存在

### 定理 8.5 (収束半径・収束円の存在)

$c \in \mathbb{C}$ ,  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  は複素数列とする。このとき冪級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$  について、次のうちどれか1つ(だけ)が成立する。

⓪ 任意の  $z \neq c$  に対して発散する。

(注:  $z = c$  ではつねに収束する。  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n = a_0 + 0 + 0 + \dots = a_0$ .)

⓲ 任意の  $z \in \mathbb{C}$  で収束する。

⓳ ある  $\rho \in (0, +\infty)$  が存在して、 $|z-c| < \rho$  ならば収束し、 $|z-c| > \rho$  ならば発散する。

## 3.2.1 収束円の存在

**証明のあらすじ** (i) でも、(ii) でもないと仮定すると、収束する  $z_1$  ( $\neq c$ ), 発散する  $z_0$  が存在する。

上の補題 (あるいは系) により  $|z_1 - c| \leq |z_0 - c|$ .

もしも等号が成り立つならば、 $\rho := |z_1 - c| (= |z_0 - c|)$  とおけば良い。

以下では、 $|z_1 - c| < |z_0 - c|$  と仮定する。図を描いて、2色のペンを持ち、「 $z_1$  よりも  $c$  に近いところでは収束」、「 $z_0$  よりも  $c$  から遠いところでは発散」。ここから二分法を始める。簡単なのだが、文章だけで説明するとかえって面倒な (一応、講義ノート [1] には書いておいたが、読みにくい) ので省略する。

## 3.2.1 収束円の存在

### 定義 8.6 (収束半径, 収束円)

上の定理の状況で、(iii) 以外の場合で、(i) のとき  $\rho := 0$ , (ii) のとき  $\rho = +\infty$  とおき、 $\rho$  を  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$  の**収束半径**という。また

$$D(c; \rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < \rho\}$$

を  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$  の**収束円** (the circle of convergence) という。

( $\rho = 0$  のとき  $D(c; \rho) = \emptyset$ ,  $\rho = +\infty$  のとき  $D(c; \rho) = \mathbb{C}$  であることに注意)

この定義から

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$  の収束半径が  $\rho \Leftrightarrow |z-c| < \rho$  ならば収束かつ  $|z-c| > \rho$  ならば発散

何かある数が収束半径であることを示すために、このことはよく使われる。

## 3.2.1 収束円の存在

### 注意 8.7 (収束円の境界)

収束円の境界  $|z - c| = \rho$  の上にある  $z$  でどうなるか。収束するか、発散するか、上の定理は何も言ってない。それはケース・バイ・ケース (後で例を見る)。

### 例 8.8 (等比級数は冪級数, この際収束条件をチェックしておく)

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ . これは  $c = 0, a_n = 1$  の場合である。実は等比級数である。

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n z^k = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} & (z \neq 1) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (n + 1) & (z = 1) \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1 - z} & (|z| < 1) \\ \text{発散} & (|z| \geq 1). \end{cases}$$

これから、 $|z| < 1$  ならば収束、 $|z| > 1$  ならば発散する。ゆえに収束半径は 1, 収束円は  $D(0; 1)$ . この結果は、実は非常に非常に重要である。冪級数は等比級数に似ていて、その収束・発散は等比級数と比較して証明されることが多いから。

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2020/complex2020.pdf> (2014～).