# 複素関数・同演習 第8回

～冪級数 (1)～

桂田 祐史 (かつらだ まさし)

2020年10月14日

# 目次

# 本日の内容・連絡事項

# 本日の内容・連絡事項

- 宿題 4 を出します (締め切りは 10 月 20 日 13:30)。

# 本日の内容・連絡事項

- 宿題 4 を出します (締め切りは 10 月 20 日 13:30)。
- 今回は問 3 の解説をします (問 2 の解説は 10 月 13 日の複素関数で行いました)。

# 本日の内容・連絡事項

- 宿題 4 を出します (締め切りは 10 月 20 日 13:30)。
- 今回は問 3 の解説をします (問 2 の解説は 10 月 13 日の複素関数で行いました)。
- 冪級数 (講義ノート [1] の §3) の解説を始めます。授業 6,7 回程度の時間がかかる長い話で、最初のうちは「知っている」はずのこともあるけれど、新しいことがたくさん出て来ます。

# 3 冪級数

いよいよ冪級数について調べ始める。冪級数は、微積分でも大きな話題であったが、複素関数の範疇で考えることでその本質が浮き彫りにされる。

# 3 冪級数

いよいよ冪級数について調べ始める。冪級数は、微積分でも大きな話題であったが、複素関数の範疇で考えることでその本質が浮き彫りにされる。

**冪級数**(ベキ)とは、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ の形の級数のことをいう。(ここで $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は複素数列、$c$ は複素数である。)

# 3 冪級数

いよいよ冪級数について調べ始める。冪級数は、微積分でも大きな話題であったが、複素関数の範疇で考えることでその本質が浮き彫りにされる。

**冪級数**（ベキ）とは、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の形の級数のことをいう。(ここで $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は複素数列、$c$ は複素数である。)

**雑談**　「冪（べき）」は、わかんむり「冖」に幕府の「幕」からなる漢字だが、しばしば「巾」と略される。個人的に「巾」が嫌いであるが、「冪」と書くのは面倒だし、見にくいので、「板書では「ベキ」とカタカナで通す」と例年言っている。今年度はスライドなので「冪」「ベキ」が混じるかも。

# 3 冪級数

いよいよ冪級数について調べ始める。冪級数は、微積分でも大きな話題であったが、複素関数の範疇で考えることでその本質が浮き彫りにされる。

**冪級数**(ベキ)とは、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の形の級数のことをいう。(ここで $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は複素数列、$c$ は複素数である。)

**雑談** 「冪」(べき)は、わかんむり「冖」に幕府の「幕」からなる漢字だが、しばしば「巾」と略される。個人的に「巾」が嫌いであるが、「冪」と書くのは面倒だし、見にくいので、「板書では「ベキ」とカタカナで通す」と例年言っている。今年度はスライドなので「冪」「ベキ」が混じるかも。

宿題でも「ベキ」と書いても構わない。

# 3 冪級数

いよいよ冪級数について調べ始める。冪級数は、微積分でも大きな話題であったが、複素関数の範疇で考えることでその本質が浮き彫りにされる。

**冪級数**（ベキ）とは、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の形の級数のことをいう。(ここで $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は複素数列、$c$ は複素数である。)

**雑談** 「冪」（べき）は、わかんむり「冖」に幕府の「幕」からなる漢字だが、しばしば「巾」と略される。個人的に「巾」が嫌いであるが、「冪」と書くのは面倒だし、見にくいので、「板書では「ベキ」とカタカナで通す」と例年言っている。今年度はスライドなので「冪」「ベキ」が混じるかも。

宿題でも「ベキ」と書いても構わない。

ベキ級数の話はかなり長くなるので、この節で何が分かるか、少し長めのイントロを用意した。

# 3.1 イントロ

「解析的 (analytic)」、「解析関数」という言葉がある。

$$\textbf{解析的} \overset{\text{def.}}{=} \text{定義域の各点の近傍で収束するベキ級数に展開できる}$$

# 3.1 イントロ

「解析的 (analytic)」、「解析関数」という言葉がある。

$$\textbf{解析的} \overset{\text{def.}}{=} \text{定義域の各点の近傍で収束するベキ級数に展開できる}$$

「解析関数」を解析的な関数という意味に取ると、実は「正則関数」と同じ意味であることが後で分かる (正則 $\Leftrightarrow$ 解析的)。一方で「解析関数」という言葉は、少し違った意味 (解析接続で定まる関数など) で使われることもある。

いくつか事実を述べる。

1. 高校生の知っている関数 (多項式関数, 有理関数, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $e^x$, $\log(1+x)$, $(1+x)^\alpha$) はほとんどが Taylor 展開可能である (例外は $|x|$ とか)。つまり $f\colon I \to \mathbb{R}$ に対して
$$(\forall c \in I)(\exists \varepsilon > 0) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \quad (|x-c| < \varepsilon).$$
これはベキ級数である (「Taylor 展開は冪級数」)。ゆえに $f$ は解析的 (実解析的) である。
$x$ を複素変数 $z$ に置き換えると複素関数に拡張できる。それらは解析的 (かつ正則) である。

2. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ について: "**収束円**" が存在する。

   $(\exists\rho\colon\ 0 \le \rho \le +\infty)\ (|z-c| < \rho \Rightarrow \text{収束}) \wedge (|z-c| > \rho \Rightarrow \text{発散})$

# 3.1 イントロ

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ について: “**収束円**” が存在する。

   $(\exists\rho\colon\ 0 \le \rho \le +\infty)\ (|z-c| < \rho \Rightarrow \text{収束}) \wedge (|z-c| > \rho \Rightarrow \text{発散})$

   $\rho$ を**収束半径**、$D(c;\rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < \rho\}$ を**収束円**とよぶ。

   $\rho = 0$ のとき $D(c;\rho) = \emptyset$, $\rho = +\infty$ のとき $D(c;\rho) = \mathbb{C}$.
   (円というときは、ふつうは $0 < \rho < +\infty$ であるが)

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ について: “**収束円**” が存在する。

$(\exists\rho\colon 0 \le \rho \le +\infty)\ (|z-c| < \rho \Rightarrow \text{収束}) \wedge (|z-c| > \rho \Rightarrow \text{発散})$

$\rho$ を**収束半径**、$D(c;\rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < \rho\}$ を**収束円**とよぶ。

$\rho = 0$ のとき $D(c;\rho) = \emptyset$, $\rho = +\infty$ のとき $D(c;\rho) = \mathbb{C}$.
(円というときは、ふつうは $0 < \rho < +\infty$ であるが)

$\rho > 0$ のとき**収束ベキ級数**という。

# 3.1 イントロ

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ について: "**収束円**" が存在する。

$(\exists\rho\colon 0 \le \rho \le +\infty)\ (|z-c| < \rho \Rightarrow 収束) \wedge (|z-c| > \rho \Rightarrow 発散)$

$\rho$ を**収束半径**、$D(c;\rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < \rho\}$ を**収束円**とよぶ。

$\rho = 0$ のとき $D(c;\rho) = \emptyset$, $\rho = +\infty$ のとき $D(c;\rho) = \mathbb{C}$.
(円というときは、ふつうは $0 < \rho < +\infty$ であるが)

$\rho > 0$ のとき**収束ベキ級数**という。

収束円の内部ではかなり自由な演算が出来る。とても簡単 (多項式関数とあまり変わらない)。

(a) 項別微分出来る。

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-c)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(z-c)^n.$$

冪級数は収束円 $D(c;\rho)$ 内で正則。ゆえに「解析的ならば正則」。

- (b) 項別積分が出来る。後で曲線 $C$ に沿う線積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を導入するが、収束円 $D(c;\rho)$ 内の曲線 $C$ (始点 $a$, 終点 $b$ として) に対して

$$\int_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z-c)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{(z-c)^{n+1}}{n+1}\right]_{z=a}^{z=b}.$$

ⓑ 項別積分が出来る。後で曲線 $C$ に沿う線積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を導入するが、収束円 $D(c;\rho)$ 内の曲線 $C$ (始点 $a$, 終点 $b$ として) に対して

$$\int_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z-c)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{(z-c)^{n+1}}{n+1}\right]_{z=a}^{z=b}.$$

③ 正則関数はベキ級数展開出来る (「正則ならば解析的」)。
つまり $\Omega$ が $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ 正則とするとき、任意の $c\in\Omega$ に対して、ある $\varepsilon>0$ が存在して $D(c;\varepsilon)\subset\Omega$ が成り立つが、このとき

$$(\exists!\{a_n\}_{n\ge 0})(\forall z\in D(c;\varepsilon))\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n.$$

(b) 項別積分が出来る。後で曲線 $C$ に沿う線積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を導入するが、収束円 $D(c;\rho)$ 内の曲線 $C$ (始点 $a$, 終点 $b$ として) に対して

$$\int_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z-c)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{(z-c)^{n+1}}{n+1}\right]_{z=a}^{z=b}.$$

(3) 正則関数はベキ級数展開出来る (「正則ならば解析的」)。
つまり $\Omega$ が $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ 正則とするとき、任意の $c\in\Omega$ に対して、ある $\varepsilon>0$ が存在して $D(c;\varepsilon)\subset\Omega$ が成り立つが、このとき

$$(\exists!\{a_n\}_{n\geq 0})(\forall z\in D(c;\varepsilon))\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n.$$

($\exists!$ は一意的に存在することを表す記号)
(ベキ級数の収束半径 $\rho$ は $\rho\geq\varepsilon$ を満たす、ということになる。)

ⓑ 項別積分が出来る。後で曲線 $C$ に沿う線積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を導入するが、収束円 $D(c;\rho)$ 内の曲線 $C$ (始点 $a$, 終点 $b$ として) に対して

$$\int_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C (z-c)^n\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{(z-c)^{n+1}}{n+1}\right]_{z=a}^{z=b}.$$

③ 正則関数はベキ級数展開出来る (「正則ならば解析的」)。
つまり $\Omega$ が $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ 正則とするとき、任意の $c\in\Omega$ に対して、ある $\varepsilon>0$ が存在して $D(c;\varepsilon)\subset\Omega$ が成り立つが、このとき

$$(\exists!\{a_n\}_{n\ge 0})(\forall z\in D(c;\varepsilon))\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n.$$

($\exists!$ は一意的に存在することを表す記号)
(ベキ級数の収束半径 $\rho$ は $\rho\ge\varepsilon$ を満たす、ということになる。)

この節では、主に (2) の証明を目標にする。(3) を証明するにはたくさんの準備が必要で、証明するのは少し後になる。

**補題 8.1 (ある点で収束すれば、より中心に近い任意の点で収束する)**

ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z=z_0$ で収束するならば、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす任意の $z\in\mathbb{C}$ で収束する。

**補題 8.1 (ある点で収束すれば、より中心に近い任意の点で収束する)**

ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z=z_0$ で収束するならば、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす任意の $z \in \mathbb{C}$ で収束する。

**証明**　$z_0=c$ のとき $|z-c|<|z_0-c|$ を満たす $z$ が存在しないので証明不要。

**補題 8.1 (ある点で収束すれば、より中心に近い任意の点で収束する)**

ベキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z = z_0$ で収束するならば、$|z-c| < |z_0 - c|$ を満たす任意の $z \in \mathbb{C}$ で収束する。

**証明**　$z_0 = c$ のとき $|z-c| < |z_0 - c|$ を満たす $z$ が存在しないので証明不要。
$z_0 \neq c$ として示す。級数が収束するので一般項は 0 に収束する:

$$\lim_{n\to\infty} a_n(z_0 - c)^n = 0.$$

**補題 8.1 (ある点で収束すれば、より中心に近い任意の点で収束する)**

べキ級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z=z_0$ で収束するならば、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす任意の $z\in\mathbb{C}$ で収束する。

**証明**　$z_0=c$ のとき $|z-c|<|z_0-c|$ を満たす $z$ が存在しないので証明不要。
$z_0\neq c$ として示す。級数が収束するので一般項は 0 に収束する:

$$\lim_{n\to\infty} a_n(z_0-c)^n=0.$$

ゆえに

$$(\exists M\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\})\quad |a_n(z_0-c)^n|\le M.$$

## 補題 8.1 (ある点で収束すれば、より中心に近い任意の点で収束する)

ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z=z_0$ で収束するならば、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす任意の $z\in\mathbb{C}$ で収束する。

**証明**　$z_0=c$ のとき $|z-c|<|z_0-c|$ を満たす $z$ が存在しないので証明不要。
$z_0\neq c$ として示す。級数が収束するので一般項は 0 に収束する:

$$\lim_{n\to\infty} a_n(z_0-c)^n=0.$$

ゆえに

$$(\exists M\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\})\quad |a_n(z_0-c)^n|\le M.$$

$b_n:=M\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|^n$ とおくと、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす $z$ に対して

$$|a_n(z-c)^n|=|a_n(z_0-c)^n|\left|\frac{(z-c)^n}{(z_0-c)^n}\right|\le M\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|^n=b_n.$$

**補題 8.1 (ある点で収束すれば、より中心に近い任意の点で収束する)**

ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z=z_0$ で収束するならば、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす任意の $z\in\mathbb{C}$ で収束する。

**証明**　$z_0=c$ のとき $|z-c|<|z_0-c|$ を満たす $z$ が存在しないので証明不要。
$z_0\neq c$ として示す。級数が収束するので一般項は 0 に収束する:

$$\lim_{n\to\infty} a_n(z_0-c)^n=0.$$

ゆえに

$$(\exists M\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\})\quad |a_n(z_0-c)^n|\le M.$$

$b_n:=M\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|^n$ とおくと、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす $z$ に対して

$$|a_n(z-c)^n|=|a_n(z_0-c)^n|\left|\frac{(z-c)^n}{(z_0-c)^n}\right|\le M\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|^n=b_n.$$

$\{b_n\}$ は公比 $\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|<1$ の等比数列であるから、$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ は収束する。

**補題 8.1 (ある点で収束すれば、より中心に近い任意の点で収束する)**

ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z=z_0$ で収束するならば、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす任意の $z\in\mathbb{C}$ で収束する。

**証明**　$z_0=c$ のとき $|z-c|<|z_0-c|$ を満たす $z$ が存在しないので証明不要。
$z_0\neq c$ として示す。級数が収束するので一般項は 0 に収束する:

$$\lim_{n\to\infty} a_n(z_0-c)^n=0.$$

ゆえに

$$(\exists M\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\})\quad |a_n(z_0-c)^n|\le M.$$

$b_n:=M\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|^n$ とおくと、$|z-c|<|z_0-c|$ を満たす $z$ に対して

$$|a_n(z-c)^n|=|a_n(z_0-c)^n|\left|\frac{(z-c)^n}{(z_0-c)^n}\right|\le M\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|^n=b_n.$$

$\{b_n\}$ は公比 $\left|\frac{z-c}{z_0-c}\right|<1$ の等比数列であるから、$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ は収束する。優級数の定理から $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ は収束する。 □

# 3.2.1 収束円の存在

## 定理 8.2 (優級数の定理)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して　(i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \leq b_n$　(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する

を満たす $\{b_n\}$ が存在すれば、$\sum a_n$ は絶対収束する。(ゆえに $\sum a_n$ は収束する。)

# 3.2.1 収束円の存在

## 定理 8.2 (優級数の定理)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して　(i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \le b_n$　(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する

を満たす $\{b_n\}$ が存在すれば、$\sum a_n$ は絶対収束する。(ゆえに $\sum a_n$ は収束する。)

**証明**

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|\,, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$$

とおく。

## 定理 8.2 (優級数の定理)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して　(i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \leq b_n$　(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する

を満たす $\{b_n\}$ が存在すれば、$\sum a_n$ は絶対収束する。(ゆえに $\sum a_n$ は収束する。)

**証明**

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|\,, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$$

とおく。$n > m$ のとき

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{m} |a_k| \right| \qquad .$$

## 定理 8.2 (優級数の定理)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して　(i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \leq b_n$　(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する

を満たす $\{b_n\}$ が存在すれば、$\sum a_n$ は絶対収束する。(ゆえに $\sum a_n$ は収束する。)

**証明**

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|\,, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$$

とおく。$n > m$ のとき

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{m} |a_k| \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \right| \qquad .$$

**定理 8.2 (優級数の定理)**

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して　(i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \le b_n$　(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する

を満たす $\{b_n\}$ が存在すれば、$\sum a_n$ は絶対収束する。(ゆえに $\sum a_n$ は収束する。)

**証明**

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$$

とおく。$n > m$ のとき

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{m} |a_k| \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \right| \le \sum_{k=m+1}^{n} b_k \qquad .$$

# 3.2.1 収束円の存在

## 定理 8.2 (優級数の定理)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して　(i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \leq b_n$　(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する

を満たす $\{b_n\}$ が存在すれば、$\sum a_n$ は絶対収束する。(ゆえに $\sum a_n$ は収束する。)

**証明**

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$$

とおく。$n > m$ のとき

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{m} |a_k| \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} b_k = T_n - T_m = |T_n - T_m|.$$

$n, m$ の大小関係によらず $|S_n - S_m| \leq |T_n - T_m|$ が成り立つことが分かる。

## 定理 8.2 (優級数の定理)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対して (i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ |a_n| \leq b_n$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束する

を満たす $\{b_n\}$ が存在すれば、$\sum a_n$ は絶対収束する。(ゆえに $\sum a_n$ は収束する。)

**証明**

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$$

とおく。$n > m$ のとき

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{k=1}^{m} |a_k| \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} b_k = T_n - T_m = |T_n - T_m|.$$

$n, m$ の大小関係によらず $|S_n - S_m| \leq |T_n - T_m|$ が成り立つことが分かる。ゆえに

$\sum b_n$ が収束 $\Leftrightarrow$ $\{T_n\}$ が収束 $\Leftrightarrow$ $\{T_n\}$ が Cauchy 列

$\Rightarrow$ $\{S_n\}$ が Cauchy 列 $\Leftrightarrow$ $\{S_n\}$ が収束 $\Leftrightarrow$ $\sum |a_n|$ が収束

$\Rightarrow$ $\sum a_n$ が収束. □

# 3.2.1 収束円の存在

上の最後の ⇒ で使った「絶対収束するならば収束」は「常識」だけれど、その証明自身が優級数の定理の証明とよく似ているので、証明してみよう。

**定理 8.3 (級数が絶対収束するならば収束する)**

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を複素数列とする。$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束するならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する。

# 3.2.1 収束円の存在

上の最後の $\Rightarrow$ で使った「絶対収束するならば収束」は「常識」だけれど、その証明自身が優級数の定理の証明とよく似ているので、証明してみよう。

**定理 8.3 (級数が絶対収束するならば収束する)**

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を複素数列とする。$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束するならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する。

**証明** $\displaystyle s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\displaystyle S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ とおく。$n > m$ ならば

$$|s_n - s_m| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| = S_n - S_m = |S_n - S_m|.$$

$m > n$ ならば (途中同様にして) $|s_n - s_m| = |s_m - s_m| \le S_m - S_n = |S_n - S_m|$.
ゆえに一般に $|s_n - s_m| \le |S_n - S_m|$ が成り立つ。

# 3.2.1 収束円の存在

上の最後の $\Rightarrow$ で使った「絶対収束するならば収束」は「常識」だけれど、その証明自身が優級数の定理の証明とよく似ているので、証明してみよう。

**定理 8.3 (級数が絶対収束するならば収束する)**

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を複素数列とする。$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束するならば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する。

**証明** $\displaystyle s_n := \sum_{k=1}^{n}a_k$, $\displaystyle S_n := \sum_{k=1}^{n}|a_k|$ とおく。$n > m$ ならば

$$|s_n - s_m| = \left|\sum_{k=1}^{n}a_k - \sum_{k=1}^{m}a_k\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n}a_k\right| \le \sum_{k=m+1}^{n}|a_k| = S_n - S_m = |S_n - S_m|.$$

$m > n$ ならば (途中同様にして) $|s_n - s_m| = |s_m - s_m| \le S_m - S_n = |S_n - S_m|$.
ゆえに一般に $|s_n - s_m| \le |S_n - S_m|$ が成り立つ。ゆえに

$$\sum|a_n| \text{ が収束} \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ が収束} \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ が Cauchy 列}$$

$$\Rightarrow \{s_n\} \text{ が Cauchy 列} \Leftrightarrow \{s_n\} \text{ が収束} \Leftrightarrow \sum a_n \text{ が収束.} \quad \square$$

# 3.2.1 収束円の存在

補題 8.1 を思い出すと

$|z_1 - c| < |z_0 - c|$ とする。級数が $z_0$ で収束するならば、$z_1$ でも収束する。
収束する点より (冪級数の中心から見て) 近い点では収束する

# 3.2.1 収束円の存在

補題 8.1 を思い出すと

$|z_1 - c| < |z_0 - c|$ とする。級数が $z_0$ で収束するならば、$z_1$ でも収束する。
収束する点より (冪級数の中心から見て) 近い点では収束する

対偶を取ると

$|z_1 - c| < |z_0 - c|$ とする。級数が $z_1$ で発散するならば、$z_0$ でも発散する。

# 3.2.1 収束円の存在

補題 8.1 を思い出すと

$|z_1 - c| < |z_0 - c|$ とする。級数が $z_0$ で収束するならば、$z_1$ でも収束する。
収束する点より (冪級数の中心から見て) 近い点では収束する

対偶を取ると

$|z_1 - c| < |z_0 - c|$ とする。級数が $z_1$ で発散するならば、$z_0$ でも発散する。

定理の形にしておく。

**系 8.4 (ある点で発散すれば、より中心から遠い任意の点で発散する)**

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ が $z = z_1$ で発散するならば、$|z - c| > |z_1 - c|$ を満たす任意の $z$ に対して発散する。

以上の準備のもと、収束円の存在定理を証明する。

## 定理 8.5 (収束半径・収束円の存在)

$c \in \mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は複素数列とする。このとき冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ について、次のうちどれか 1 つ (だけ) が成立する。

1. 任意の $z \neq c$ に対して発散する。
   (注: $z = c$ ではつねに収束する。$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n = a_0 + 0 + 0 + \cdots = a_0$.)
2. 任意の $z \in \mathbb{C}$ で収束する。
3. ある $\rho \in (0, +\infty)$ が存在して、$|z-c| < \rho$ ならば収束し、$|z-c| > \rho$ ならば発散する。

# 3.2.1 収束円の存在

**証明のあらすじ**　(i) でも、(ii) でもないと仮定すると、収束する $z_1$ $(\neq c)$, 発散する $z_0$ が存在する。

# 3.2.1 収束円の存在

**証明のあらすじ**　(i) でも、(ii) でもないと仮定すると、収束する $z_1$ $(\neq c)$, 発散する $z_0$ が存在する。

上の補題 (あるいは系) により $|z_1 - c| \leq |z_0 - c|$.

# 3.2.1 収束円の存在

**証明のあらすじ**　(i) でも、(ii) でもないと仮定すると、収束する $z_1$ $(\neq c)$, 発散する $z_0$ が存在する。

上の補題 (あるいは系) により $|z_1 - c| \leq |z_0 - c|$.
もしも等号が成り立つならば、$\rho := |z_1 - c|$ $(= |z_0 - c|)$ とおけば良い。

# 3.2.1 収束円の存在

**証明のあらすじ**　(i) でも、(ii) でもないと仮定すると、収束する $z_1$ ($\neq c$), 発散する $z_0$ が存在する。

上の補題 (あるいは系) により $|z_1 - c| \leq |z_0 - c|$.
もしも等号が成り立つならば、$\rho := |z_1 - c|$ $(= |z_0 - c|)$ とおけば良い。

以下では、$|z_1 - c| < |z_0 - c|$ と仮定する。図を描いて、2 色のペンを持ち、「$z_1$ よりも $c$ に近いところでは収束」、「$z_0$ よりも $c$ から遠いところでは発散」。ここから二分法を始める。簡単なのだが、文章だけで説明するとかえって面倒な (一応、講義ノート [1] には書いておいたが、読みにくい) ので省略する。

# 3.2.1 収束円の存在

## 定義 8.6 (収束半径, 収束円)

上の定理の状況で、(iii) 以外の場合で、(i) のとき $\rho := 0$, (ii) のとき $\rho = +\infty$ とおき、$\rho$ を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の**収束半径**という。また

$$D(c;\rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < \rho\}$$

を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の**収束円** (the circle of convergence) という。
($\rho = 0$ のとき $D(c;\rho) = \emptyset$, $\rho = +\infty$ のとき $D(c;\rho) = \mathbb{C}$ であることに注意)

# 3.2.1 収束円の存在

## 定義 8.6 (収束半径, 収束円)

上の定理の状況で、(iii) 以外の場合で、(i) のとき $\rho := 0$, (ii) のとき $\rho = +\infty$ とおき、$\rho$ を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の**収束半径**という。また

$$D(c;\rho) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < \rho\}$$

を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の**収束円** (the circle of convergence) という。
($\rho = 0$ のとき $D(c;\rho) = \emptyset$, $\rho = +\infty$ のとき $D(c;\rho) = \mathbb{C}$ であることに注意)

この定義から

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径が $\rho \Leftrightarrow |z-c| < \rho$ ならば収束かつ $|z-c| > \rho$ ならば発散

何かある数が収束半径であることを示すために、このことはよく使われる。

**注意 8.7 (収束円の境界)**

収束円の境界 $|z-c|=\rho$ の上にある $z$ でどうなるか。収束するか、発散するか、上の定理は何も言ってない。それはケース・バイ・ケース (後で例を見る)。

**注意 8.7 (収束円の境界)**

収束円の境界 $|z-c|=\rho$ の上にある $z$ でどうなるか。収束するか、発散するか、上の定理は何も言ってない。それはケース・バイ・ケース (後で例を見る)。

**例 8.8 (等比級数は冪級数, この際収束条件をチェックしておく)**

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. これは $c=0$, $a_n=1$ の場合である。実は等比級数である。

# 3.2.1 収束円の存在

## 注意 8.7 (収束円の境界)

収束円の境界 $|z-c|=\rho$ の上にある $z$ でどうなるか。収束するか、発散するか、上の定理は何も言ってない。それはケース・バイ・ケース (後で例を見る)。

## 例 8.8 (等比級数は冪級数, この際収束条件をチェックしておく)

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. これは $c=0$, $a_n=1$ の場合である。実は等比級数である。

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-z^{n+1}}{1-z} & (z\neq 1) \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1) & (z=1) \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-z} & (|z|<1) \\ \text{発散} & (|z|\geq 1). \end{cases}$$

# 3.2.1 収束円の存在

## 注意 8.7 (収束円の境界)

収束円の境界 $|z-c|=\rho$ の上にある $z$ でどうなるか。収束するか、発散するか、上の定理は何も言ってない。それはケース・バイ・ケース (後で例を見る)。

## 例 8.8 (等比級数は冪級数，この際収束条件をチェックしておく)

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. これは $c=0$, $a_n=1$ の場合である。実は等比級数である。

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1-z^{n+1}}{1-z} & (z\neq 1) \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}(n+1) & (z=1) \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-z} & (|z|<1) \\ 発散 & (|z|\geq 1). \end{cases}$$

これから、$|z|<1$ ならば収束、$|z|>1$ ならば発散する。ゆえに収束半径は 1, 収束円は $D(0;1)$. この結果は、実は非常に非常に重要である。冪級数は等比級数に似ていて、その収束・発散は等比級数と比較して証明されることが多いから。

# 参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2020/complex2020.pdf (2014〜).