

複素関数・同演習 第7回

～ Cauchy-Riemann 方程式 (2) ～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2020年10月13日

目次

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 複素関数の極限、連続性、正則性 (続き)
 - Cauchy-Riemann 方程式
 - 正則関数が定数となる場合
 - 正則関数と調和関数
 - 等角性
 - 逆関数定理
- 3 宿題 (問 4) について
- 4 参考文献

本日の内容・連絡事項

- 宿題 4 を出します (締め切りは 10 月 20 日 13:30)。
- 今回は問 2 の解説をします (問 3 の解説は 10 月 14 日の複素関数演習で行います)。
- Cauchy-Riemann 方程式 (講義ノート [1] の §2.5.2) の後半を解説します。正則関数と調和関数との関係、等角性、逆関数定理など、単なる計算にとどまらない話に注目。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

有名な定理 7.4 (正則関数で、その実部、虚部、絶対値のいずれかが定数関数であるものは定数関数である) を紹介する。

これを使うと、 $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\operatorname{Arg} z$ が正則関数でないことがすぐに分かる (いずれも実数値なので虚部が定数関数 0)。

そのための準備をする。次の問を考えてみよう。

問 $f' = 0$ ならば f は定数関数か？

答 無条件では f が定数とは言えない。

まず 1 実変数関数、つまり $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ のときを調べよう。

「 $f' = 0$ ならば f は定数関数」は偽である。

反例: $I = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

もしも I が区間ならば、 f は I で定数である (平均値の定理で証明できる)。定義域が何であるかも重要である。

多変数の場合に同様のことをしたければ、(弧) 連結性の概念が必要になる。

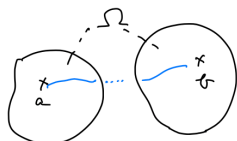
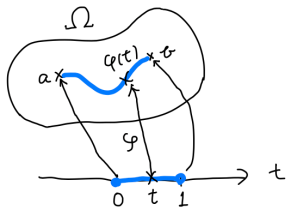
2.5.2 正則関数が定数となる場合

定義 7.1 (弧連結, 領域)

$\Omega \subset \mathbb{R}^l$ (あるいは $\Omega \subset \mathbb{C}$) が**弧連結** (pathwise-connected, arcwise-connected) とは、 Ω 内の任意の2点が Ω 内の曲線で結べることをいう。

(すなわち、 Ω の任意の2点 a, b に対して、連続関数 $\varphi: [0, 1] \rightarrow \Omega$ で、 $\varphi(0) = a, \varphi(1) = b$ を満たすものが存在するとき、 Ω は弧連結であるという。)

弧連結な開集合を**領域** (region) と呼ぶ。



弧連結でない

直観的には、平面図形 Ω が弧連結であるとは、 Ω が1つの島からなる国であることである。2つ以上の島からなる国は弧連結ではないが、個々の島のことを**弧連結成分**と呼ぶ。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

注意 7.2 (上の定義は実は普通でない)

普通は (「弧連結」でない) 「連結」という言葉を定義して、連結な開集合のことを領域と定義する。

- 「連結」はやや分かりにくい。「弧連結」は直観的で分かりやすい。
- \mathbb{R}^l の開集合について「連結」と「弧連結」は同値なので、「領域とは、弧連結な開集合のこと」としても領域の意味には変わりがない。

という二つの理由から、上のように定義することにした。 □

\mathbb{R} の部分集合 I について、 I が区間 $\Leftrightarrow I$ は弧連結。

問 このことを証明せよ (ヒント: 中間値の定理)。

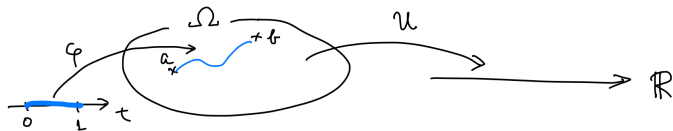
Ω が弧連結な開集合 (領域) のとき、 Ω の任意の 2 点は C^1 級の曲線で結べる。つまり上の定義の φ として、単に連続であるだけでなく、 C^1 級であるものが取れる。以下では、これを認めて議論する (証明は省略する。講義ノート [1] の付録 B に書いてある。)

2.5.2 正則関数が定数となる場合

次の補題は微積分でも学んだことがあるだろう。

補題 7.3 (領域で導関数が0に等しい関数は定数関数である)

Ω は \mathbb{R}^n の領域、 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が (全) 微分可能で、 $u' = 0$ を満たすならば、 u は Ω 全体で定数関数に等しい。



証明 任意の $a, b \in \Omega$ に対して、ある $\varphi: [0, 1] \rightarrow \Omega$ が存在して、 φ は C^1 級かつ $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$.

このとき、 $F(t) := u(\varphi(t))$ ($t \in [0, 1]$) とおくと

$$F'(t) = u'(\varphi(t))\varphi'(t) = 0 \cdot \varphi'(t) = 0.$$

ゆえに F は定数関数である。特に $F(0) = F(1)$ 。ゆえに $u(a) = u(b)$ 。

(実際 $u(a) = u(\varphi(0)) = F(0) = F(1) = u(\varphi(1)) = u(b)$.)

以上より u は Ω 全体で定数関数である。 □

2.5.2 正則関数が定数となる場合

次の定理は多くの関数論のテキストに載っている。

定理 7.4 (正則関数の実部・虚部・絶対値のいずれかが定数ならば定数関数)

Ω は \mathbb{C} の領域 (弧連結な開集合)、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則とする。

- ① f の実部または虚部が定数関数ならば、 f 自身が定数関数である。特に実数値または純虚数値の正則関数は定数関数しかない。
- ② $|f|$ が定数関数ならば、 f 自身が定数関数である。

証明 $\tilde{\Omega} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + yi \in \Omega\}$ とおく。

- ① 実部が定数関数の場合を証明する。 f の実部、虚部をそれぞれ u, v とするとき、仮定から $u = C$ (定数) であるから、 $u_x = u_y = 0$ in $\tilde{\Omega}$.
Cauchy-Riemann の方程式

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

が成り立つので、 $v_x = -u_y = 0$, $v_y = u_x = 0$ in $\tilde{\Omega}$. 補題 7.3 より、 v は定数関数である。ゆえに $f = u + iv$ も定数関数である。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

- ② $|f| = C$ (C は定数) とおく。 $C = 0$ であれば $f = 0$ (in Ω) であるから、 f は定数関数である。以下 $C \neq 0$ とする。 $|f|^2 = C^2 = u^2 + v^2$ を微分して、

$$2uu_x + 2vv_x = 0, \quad 2uu_y + 2vv_y = 0 \quad (\text{in } \tilde{\Omega}).$$

Cauchy-Riemann 方程式を代入して (v_x, v_y を消去して)

$$uu_x - vu_y = 0, \quad uu_y + vu_x = 0 \quad (\text{in } \tilde{\Omega}).$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{in } \tilde{\Omega}).$$

任意の $(x, y) \in \tilde{\Omega}$ において、 $u^2 + v^2 = C^2 > 0$ であるから、 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. ゆえに行列は特異であるから (もし正則であれば、逆行列を左からかけて矛盾が生じる)

$$u_x^2 + u_y^2 = 0 \quad (\text{in } \tilde{\Omega}).$$

これから $u_x = u_y = 0$ (in $\tilde{\Omega}$). 補題 7.3 より、 u は $\tilde{\Omega}$ で定数関数である。(1) より f は $\tilde{\Omega}$ で定数関数である。 \square

2.5.3 正則関数と調和関数

次は非常に有名で重要な結果 (例えば「応用複素関数」では頻出)。

定理 7.5 (正則関数の実部虚部は調和関数である)

Ω は \mathbb{C} の開集合、 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は正則とすると、 f の実部・虚部 u, v は

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad (\text{in } \tilde{\Omega} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + iy \in \Omega\})$$

を満たす。すなわち u と v は調和関数である (定義は次のスライド)。

証明 後で f が正則ならば、 f は何回でも微分可能であるという定理を証明する。先走ってそれを認めると、 u と v は C^∞ 級である。

Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つので、

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

最後の等号が成り立つのは、 v が C^2 級であることによる (v の 2 階偏導関数は偏微分の順序によらない)。

同様にして $v_{xx} + v_{yy} = 0$ も証明できる。 □

2.5.3 正則関数と調和関数

\mathbb{R}^n の開集合 Ω で定義された関数 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

を満たすとき、 u は**調和関数** (harmonic function) であるという。また (1) を **Laplace 方程式** (Laplace equation) とよぶ。

$$(2) \quad \Delta := \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

で定義される微分作用素 Δ を **Laplace 作用素** とよぶ。これを用いると (1) は

$$(3) \quad \Delta u = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

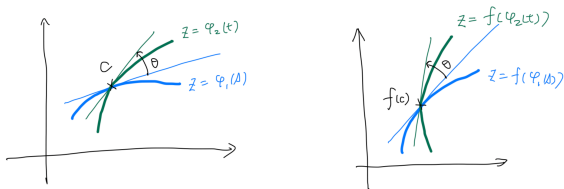
と表せる。

Δ のことを ∇^2 と書くことも多い ($\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \nabla \cdot (\nabla u)$ であるから)。上の定理は「正則関数の実部と虚部は調和関数である」と手短かに述べられる。

\mathbb{R}^2 の開集合で定義された2つの調和関数 u, v が Cauchy-Riemann 方程式を満たすとき、 v を u の**共役調和関数** (conjugate harmonic function of u) とよぶ。「正則関数の虚部は実部の共役調和関数である」ということになる。

2.5.4 等角性

正則関数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ は、 $f'(c) \neq 0$ であれば、 c で交わる任意の2曲線を $f'(c)$ で交わる2曲線に写し、**その交角を変えない**という性質 (**等角性**) を持つ。



一般に、定義域 Ω 全体で $f' \neq 0$ を満たす正則関数 f を**等角写像** (conformal mapping) と呼ぶ。

$f(x, y) := \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$, $c := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \operatorname{Re} c \\ \operatorname{Im} c \end{pmatrix}$ とおくと、 $f: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$, さらに

$$f \text{ が } c \text{ で微分可能} \Leftrightarrow \mathbf{f} \text{ が } \mathbf{c} \text{ で微分可能で } (\exists p, q \in \mathbb{R}) \mathbf{f}'(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}.$$

なぜならば、 $\mathbf{f}'(x, y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ で、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つから。ゆえに

$$(4) \quad \det \mathbf{f}'(\mathbf{c}) = |f'(c)|^2 \quad (= p^2 + q^2).$$

2.5.4 等角性

$f'(c) = p + qi \neq 0$ を仮定して、 $f'(c)$ の偏角を θ とすると

$$f'(c) = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} = \sqrt{p^2 + q^2} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{回転と拡大}).$$

ゆえに

$$f(c+h) - f(c) \doteq f'(c)h$$

の右辺は、 h の長さを $\sqrt{p^2 + q^2}$ 倍、角度 θ だけ回転したものである。

一般に 1 次変換は、正方形を平行四辺形に写す (歪みが生じることもある) が、

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は正方形を正方形に写す (歪まない)。

以上で、等角性が成り立つことが示された。

2.5.5 逆関数定理

定理 7.6 (正則関数の逆関数定理 (弱い形))

f が正則で、 f' が連続かつ $f'(c) \neq 0$ であれば、 c の十分小さな開近傍 (c を含む開集合) で正則な逆関数が存在する。

証明 微積分に「逆関数定理」がある。 f が C^1 級で、 $\det f'(c) \neq 0$ ならば、 c を含む十分小さな開集合 \tilde{U} では f は単射で、

$$f|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \ni x \mapsto f(x) \in f(\tilde{U})$$

の C^1 級の逆写像が存在する、という内容である。それを認めることにする。

$f'(c) \neq 0$ を満たす正則関数 f に対応する f については ($f'(c) = p + iq$ ($p, q \in \mathbb{R}$) とおいて)

$$\det f'(c) = |f'(c)|^2 \neq 0, \quad (f'(c))^{-1} = \frac{1}{p^2 + q^2} \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}.$$

これから、対応する f の局所的逆関数 $(f|_U)^{-1}$ は、Cauchy-Riemann 方程式を満たす。ゆえに $(f|_U)^{-1}$ は正則関数である。□

後で「 f が正則ならば、 f は無限回微分可能」という定理を証明するので、定理の仮定に「 f' が連続」を書く必要はなくなる。

宿題 (問 4) について

とある年度の期末試験で、複素関数 $\frac{1}{z}$ の原始関数が $\log|z|$ とする人がかなりの数出現した。現時点 (というより前回の段階?) で間違いであることが難しくなく理解できる (はずなのに)。

この段階で宿題のネタにすると良いかもしれない、と考えて次の問題を出題する。

問題 $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ を $f(z) = \log|z|$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) で定める。ただし、 $\log: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ は、微積分に現われる (高校生も知っている) 実関数である。 f はいたるところで微分出来ないことを示せ。

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2020/complex2020.pdf> (2014～).