複素関数・同演習 第 7 回

～ Cauchy-Riemann 方程式 (2) ～

桂田 祐史 (かつらだ まさし)

2020 年 10 月 13 日

目次

本日の内容・連絡事項

- 宿題 4 を出します (締め切りは 10 月 20 日 13:30)。

本日の内容・連絡事項

- 宿題 4 を出します (締め切りは 10 月 20 日 13:30)。
- 今回は問 2 の解説をします (問 3 の解説は 10 月 14 日の複素関数演習で行います)。

本日の内容・連絡事項

- 宿題 4 を出します (締め切りは 10 月 20 日 13:30)。
- 今回は問 2 の解説をします (問 3 の解説は 10 月 14 日の複素関数演習で行います)。
- Cauchy-Riemann 方程式 (講義ノート [1] の §2.5.2) の後半を解説します。正則関数と調和関数との関係、等角性、逆関数定理など、単なる計算にとどまらない話に注目。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

有名な定理 7.4 (正則関数で、その実部、虚部、絶対値のいずれかが定数関数であるものは定数関数である) を紹介する。

これを使うと、$\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $|z|$, $\mathrm{Arg}\, z$ が正則関数でないことがすぐに分かる (いずれも実数値なので虚部が定数関数 0)。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

有名な定理 7.4 (正則関数で、その実部、虚部、絶対値のいずれかが定数関数であるものは定数関数である) を紹介する。

これを使うと、$\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $|z|$, $\mathrm{Arg}\, z$ が正則関数でないことがすぐに分かる (いずれも実数値なので虚部が定数関数 0)。

そのための準備をする。次の問を考えてみよう。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

有名な定理 7.4 (正則関数で、その実部、虚部、絶対値のいずれかが定数関数であるものは定数関数である) を紹介する。

これを使うと、$\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $|z|$, $\mathrm{Arg}\, z$ が正則関数でないことがすぐに分かる (いずれも実数値なので虚部が定数関数 0)。

そのための準備をする。次の問を考えてみよう。

問　$f' = 0$ ならば f は定数関数か？

2.5.2 正則関数が定数となる場合

有名な定理 7.4 (正則関数で、その実部、虚部、絶対値のいずれかが定数関数であるものは定数関数である) を紹介する。

これを使うと、$\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\operatorname{Arg} z$ が正則関数でないことがすぐに分かる (いずれも実数値なので虚部が定数関数 0)。

そのための準備をする。次の問を考えてみよう。

問　$f' = 0$ ならば f は定数関数か？

答　無条件では f が定数とは言えない。

まず 1 実変数関数、つまり $I \subset \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ のときを調べよう。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

有名な定理 7.4 (正則関数で、その実部、虚部、絶対値のいずれかが定数関数であるものは定数関数である) を紹介する。

これを使うと、$\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $|z|$, $\mathrm{Arg}\, z$ が正則関数でないことがすぐに分かる (いずれも実数値なので虚部が定数関数 0)。

そのための準備をする。次の問を考えてみよう。

問　$f' = 0$ ならば f は定数関数か？

答　無条件では f が定数とは言えない。

まず 1 実変数関数、つまり $I \subset \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ のときを調べよう。

「$f' = 0$ ならば f は定数関数」は偽である。

反例: $I = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

2.5.2 正則関数が定数となる場合

有名な定理 7.4 (正則関数で、その実部、虚部、絶対値のいずれかが定数関数であるものは定数関数である) を紹介する。

これを使うと、$\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $|z|$, $\mathrm{Arg}\, z$ が正則関数でないことがすぐに分かる (いずれも実数値なので虚部が定数関数 0)。

そのための準備をする。次の問を考えてみよう。

問　$f' = 0$ ならば f は定数関数か？

答　無条件では f が定数とは言えない。

まず 1 実変数関数、つまり $I \subset \mathbb{R}$, $f \colon I \to \mathbb{R}$ のときを調べよう。

「$f' = 0$ ならば f は定数関数」は偽である。

反例: $I = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

もしも I が区間ならば、f は I で定数である (平均値の定理で証明できる)。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

有名な定理 7.4 (正則関数で、その実部、虚部、絶対値のいずれかが定数関数であるものは定数関数である) を紹介する。

これを使うと、$\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $|z|$, $\mathrm{Arg}\, z$ が正則関数でないことがすぐに分かる (いずれも実数値なので虚部が定数関数 0)。

そのための準備をする。次の問を考えてみよう。

問　$f' = 0$ ならば f は定数関数か？

答　無条件では f が定数とは言えない。

まず 1 実変数関数、つまり $I \subset \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ のときを調べよう。

「$f' = 0$ ならば f は定数関数」は偽である。

反例: $I = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

もしも I が区間ならば、f は I で定数である (平均値の定理で証明できる)。
定義域が何であるかも重要である。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

有名な定理 7.4 (正則関数で、その実部、虚部、絶対値のいずれかが定数関数であるものは定数関数である) を紹介する。

これを使うと、$\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $|z|$, $\mathrm{Arg}\, z$ が正則関数でないことがすぐに分かる (いずれも実数値なので虚部が定数関数 0)。

そのための準備をする。次の問を考えてみよう。

問　$f' = 0$ ならば f は定数関数か？

答　無条件では f が定数とは言えない。

まず 1 実変数関数、つまり $I \subset \mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ のときを調べよう。

「$f' = 0$ ならば f は定数関数」は偽である。

反例: $I = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

もしも I が区間ならば、f は I で定数である (平均値の定理で証明できる)。
定義域が何であるかも重要である。

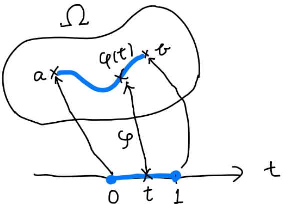
多変数の場合に同様のことをしたければ、**(弧) 連結性**の概念が必要になる。

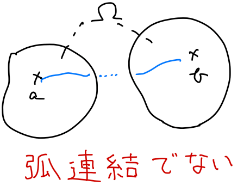
2.5.2 正則関数が定数となる場合

定義 7.1 (弧連結, 領域)

$\Omega \subset \mathbb{R}^\ell$ (あるいは $\Omega \subset \mathbb{C}$) が**弧連結** (pathwise-connected, arcwise-connected) とは、Ω 内の任意の 2 点が Ω 内の曲線で結べることをいう。
(すなわち、Ω の任意の 2 点 a, b に対して、連続関数 $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ で、$\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$ を満たすものが存在するとき、Ω は弧連結であるという。)

弧連結な開集合を**領域** (region) と呼ぶ。

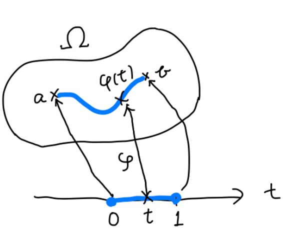


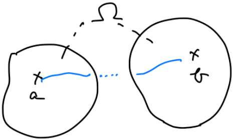


定義 7.1 (弧連結, 領域)

$\Omega \subset \mathbb{R}^\ell$ (あるいは $\Omega \subset \mathbb{C}$) が**弧連結** (pathwise-connected, arcwise-connected) とは、Ω 内の任意の 2 点が Ω 内の曲線で結べることをいう。
(すなわち、Ω の任意の 2 点 a, b に対して、連続関数 $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ で、$\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$ を満たすものが存在するとき、Ω は弧連結であるという。)

弧連結な開集合を**領域** (region) と呼ぶ。





弧連結でない

直観的には、平面図形 Ω が弧連結であるとは、Ω が 1 つの島からなる国であることである。2 つ以上の島からなる国は弧連結ではないが、個々の島のことを**弧連結成分**と呼ぶ。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

注意 7.2 (上の定義は実は普通でない)

普通は (「弧連結」でない) 「連結」という言葉を定義して、連結な開集合のことを領域と定義する。

- 「連結」はやや分かりにくい。「弧連結」は直観的で分かりやすい。
- $\mathbb{R}^\ell$ の開集合について「連結」と「弧連結」は同値なので、「領域とは、弧連結な開集合のこと」としても領域の意味には変わりがない。

という二つの理由から、上のように定義することにした。 $\square$

$\mathbb{R}$ の部分集合 I について、I が区間 $\Leftrightarrow$ I は弧連結。
問 このことを証明せよ (ヒント: 中間値の定理)。

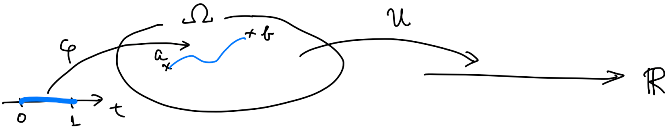
Ω が弧連結な開集合 (領域) のとき、Ω の任意の 2 点は C^1 級の曲線で結べる。つまり上の定義の φ として、単に連続であるだけでなく、C^1 級であるものが取れる。以下では、これを認めて議論する (証明は省略する。講義ノート [1] の付録 B に書いてある。)。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

次の補題は微積分でも学んだことがあるだろう。

補題 7.3 (領域で導関数が 0 に等しい関数は定数関数である)

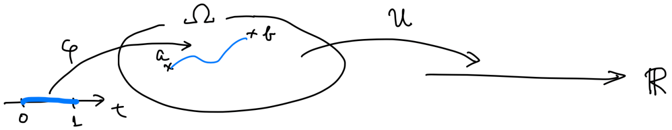
Ω は $\mathbb{R}^n$ の領域、$u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が (全) 微分可能で、$u' = 0$ を満たすならば、u は Ω 全体で定数関数に等しい。



次の補題は微積分でも学んだことがあるだろう。

補題 7.3 (領域で導関数が 0 に等しい関数は定数関数である)

Ω は $\mathbb{R}^n$ の領域、$u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が (全) 微分可能で、$u' = 0$ を満たすならば、u は Ω 全体で定数関数に等しい。



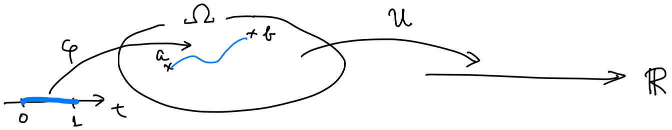
証明　任意の $a, b \in \Omega$ に対して、ある $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ が存在して、φ は C^1 級かつ $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$.

2.5.2 正則関数が定数となる場合

次の補題は微積分でも学んだことがあるだろう。

補題 7.3 (領域で導関数が 0 に等しい関数は定数関数である)

Ω は $\mathbb{R}^n$ の領域、$u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が (全) 微分可能で、$u' = 0$ を満たすならば、u は Ω 全体で定数関数に等しい。



証明　任意の $a, b \in \Omega$ に対して、ある $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ が存在して、φ は C^1 級かつ $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$.
このとき、$F(t) := u(\varphi(t))$ $(t \in [0,1])$ とおくと

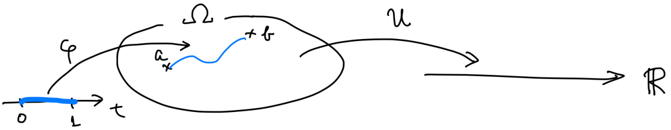
$$F'(t) = u'(\varphi(t))\varphi'(t) = 0 \cdot \varphi'(t) = 0.$$

2.5.2 正則関数が定数となる場合

次の補題は微積分でも学んだことがあるだろう。

補題 7.3 (領域で導関数が 0 に等しい関数は定数関数である)

Ω は $\mathbb{R}^n$ の領域、$u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が (全) 微分可能で、$u' = 0$ を満たすならば、u は Ω 全体で定数関数に等しい。



証明　任意の $a, b \in \Omega$ に対して、ある $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ が存在して、φ は C^1 級かつ $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$.
このとき、$F(t) := u(\varphi(t))$ $(t \in [0,1])$ とおくと

$$F'(t) = u'(\varphi(t))\varphi'(t) = 0 \cdot \varphi'(t) = 0.$$

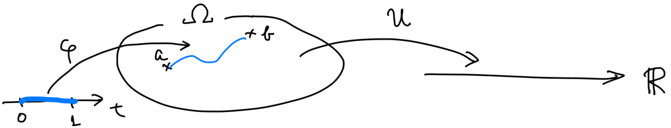
ゆえに F は定数関数である。特に $F(0) = F(1)$. ゆえに $u(a) = u(b)$.

2.5.2 正則関数が定数となる場合

次の補題は微積分でも学んだことがあるだろう。

補題 7.3 (領域で導関数が 0 に等しい関数は定数関数である)

Ω は $\mathbb{R}^n$ の領域、$u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が (全) 微分可能で、$u' = 0$ を満たすならば、u は Ω 全体で定数関数に等しい。



証明　任意の $a, b \in \Omega$ に対して、ある $\varphi\colon [0,1] \to \Omega$ が存在して、φ は C^1 級かつ $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$.
このとき、$F(t) := u(\varphi(t))$ $(t \in [0,1])$ とおくと

$$F'(t) = u'(\varphi(t))\varphi'(t) = 0 \cdot \varphi'(t) = 0.$$

ゆえに F は定数関数である。特に $F(0) = F(1)$. ゆえに $u(a) = u(b)$.
(実際 $u(a) = u(\varphi(0)) = F(0) = F(1) = u(\varphi(1)) = u(b)$.)
以上より u は Ω 全体で定数関数である。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

次の定理は多くの関数論のテキストに載っている。

定理 7.4 (正則関数の実部・虚部・絶対値のいずれかが定数ならば定数関数)

Ω は $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とする。

1. f の実部または虚部が定数関数ならば、f 自身が定数関数である。特に実数値または純虚数値の正則関数は定数関数しかない。
2. $|f|$ が定数関数ならば、f 自身が定数関数である。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

次の定理は多くの関数論のテキストに載っている。

定理 7.4 (正則関数の実部・虚部・絶対値のいずれかが定数ならば定数関数)

Ω は $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、$f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ は正則とする。

1. f の実部または虚部が定数関数ならば、f 自身が定数関数である。特に実数値または純虚数値の正則関数は定数関数しかない。
2. $|f|$ が定数関数ならば、f 自身が定数関数である。

証明 $\widetilde{\Omega}:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+yi\in\Omega\right\}$ とおく。

1. 実部が定数関数の場合を証明する。f の実部、虚部をそれぞれ u, v とするとき、仮定から $u=C$ (定数) であるから、$u_x=u_y=0$ in $\widetilde{\Omega}$.

2.5.2 正則関数が定数となる場合

次の定理は多くの関数論のテキストに載っている。

定理 7.4 (正則関数の実部・虚部・絶対値のいずれかが定数ならば定数関数)

Ω は $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とする。

1. f の実部または虚部が定数関数ならば、f 自身が定数関数である。特に実数値または純虚数値の正則関数は定数関数しかない。
2. $|f|$ が定数関数ならば、f 自身が定数関数である。

証明 $\widetilde{\Omega} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + yi \in \Omega\right\}$ とおく。

1. 実部が定数関数の場合を証明する。f の実部、虚部をそれぞれ u, v とするとき、仮定から $u = C$ (定数) であるから、$u_x = u_y = 0$ in $\widetilde{\Omega}$.
   Cauchy-Riemann の方程式
   $$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$
   が成り立つので、$v_x = -u_y = 0$, $v_y = u_x = 0$ in $\widetilde{\Omega}$.

2.5.2 正則関数が定数となる場合

次の定理は多くの関数論のテキストに載っている。

定理 7.4 (正則関数の実部・虚部・絶対値のいずれかが定数ならば定数関数)

Ω は $\mathbb{C}$ の領域 (弧連結な開集合)、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とする。

1. f の実部または虚部が定数関数ならば、f 自身が定数関数である。特に実数値または純虚数値の正則関数は定数関数しかない。
2. $|f|$ が定数関数ならば、f 自身が定数関数である。

証明 $\widetilde{\Omega} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + yi \in \Omega\right\}$ とおく。

1. 実部が定数関数の場合を証明する。f の実部、虚部をそれぞれ u, v とするとき、仮定から $u = C$ (定数) であるから、$u_x = u_y = 0$ in $\widetilde{\Omega}$.
Cauchy-Riemann の方程式

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

が成り立つので、$v_x = -u_y = 0$, $v_y = u_x = 0$ in $\widetilde{\Omega}$. 補題 7.3 より、v は定数関数である。ゆえに $f = u + iv$ も定数関数である。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

2. $|f| = C$ (C は定数) とおく。$C = 0$ であれば $f = 0$ (in Ω) であるから、f は定数関数である。以下 $C \neq 0$ とする。

2.5.2 正則関数が定数となる場合

2. $|f| = C$ (C は定数) とおく。$C = 0$ であれば $f = 0$ (in Ω) であるから、f は定数関数である。以下 $C \neq 0$ とする。$|f|^2 = C^2 = u^2 + v^2$ を微分して、

$$2uu_x + 2vv_x = 0, \quad 2uu_y + 2vv_y = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

2.5.2 正則関数が定数となる場合

(2) $|f| = C$ (C は定数) とおく。$C = 0$ であれば $f = 0$ (in Ω) であるから、f は定数関数である。以下 $C \neq 0$ とする。$|f|^2 = C^2 = u^2 + v^2$ を微分して、

$$2uu_x + 2vv_x = 0, \quad 2uu_y + 2vv_y = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

Cauchy-Riemann 方程式を代入して (v_x, v_y を消去して)

$$uu_x - vu_y = 0, \quad uu_y + vu_x = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

2.5.2 正則関数が定数となる場合

2. $|f| = C$ (C は定数) とおく。$C = 0$ であれば $f = 0$ (in Ω) であるから、f は定数関数である。以下 $C \neq 0$ とする。$|f|^2 = C^2 = u^2 + v^2$ を微分して、

$$2uu_x + 2vv_x = 0, \quad 2uu_y + 2vv_y = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

Cauchy-Riemann 方程式を代入して (v_x, v_y を消去して)

$$uu_x - vu_y = 0, \quad uu_y + vu_x = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

任意の $(x, y) \in \widetilde{\Omega}$ において、$u^2 + v^2 = C^2 > 0$ であるから、$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. $|f| = C$ (C は定数) とおく。$C = 0$ であれば $f = 0$ (in Ω) であるから、f は定数関数である。以下 $C \neq 0$ とする。$|f|^2 = C^2 = u^2 + v^2$ を微分して、

$$2uu_x + 2vv_x = 0, \quad 2uu_y + 2vv_y = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

Cauchy-Riemann 方程式を代入して (v_x, v_y を消去して)

$$uu_x - vu_y = 0, \quad uu_y + vu_x = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

任意の $(x, y) \in \widetilde{\Omega}$ において、$u^2 + v^2 = C^2 > 0$ であるから、$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. ゆえに行列は特異であるから (もし正則であれば、逆行列を左からかけて矛盾が生じる)

$$u_x^2 + u_y^2 = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

2.5.2 正則関数が定数となる場合

(2) $|f| = C$ (C は定数) とおく。$C = 0$ であれば $f = 0$ (in Ω) であるから、f は定数関数である。以下 $C \neq 0$ とする。$|f|^2 = C^2 = u^2 + v^2$ を微分して、

$$2uu_x + 2vv_x = 0, \quad 2uu_y + 2vv_y = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

Cauchy-Riemann 方程式を代入して (v_x, v_y を消去して)

$$uu_x - vu_y = 0, \quad uu_y + vu_x = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

任意の $(x, y) \in \widetilde{\Omega}$ において、$u^2 + v^2 = C^2 > 0$ であるから、$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. ゆえに行列は特異であるから (もし正則であれば、逆行列を左からかけて矛盾が生じる)

$$u_x^2 + u_y^2 = 0 \quad (\text{in } \widetilde{\Omega}).$$

これから $u_x = u_y = 0$ (in $\widetilde{\Omega}$). 補題 7.3 より、u は $\widetilde{\Omega}$ で定数関数である。(1) より f は $\widetilde{\Omega}$ で定数関数である。 □

2.5.3 正則関数と調和関数

次は非常に有名で重要な結果 (例えば「応用複素関数」では頻出)。

定理 7.5 (正則関数の実部虚部は調和関数である)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とするとき、f の実部・虚部 u, v は

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \left(\text{in } \widetilde{\Omega} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + iy \in \Omega\right\}\right)$$

を満たす。すなわち u と v は調和関数である (定義は次のスライド)。

2.5.3 正則関数と調和関数

次は非常に有名で重要な結果 (例えば「応用複素関数」では頻出)。

定理 7.5 (正則関数の実部虚部は調和関数である)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とするとき、f の実部・虚部 u, v は

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \left(\text{in } \widetilde{\Omega} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + iy \in \Omega\right\}\right)$$

を満たす。すなわち u と v は調和関数である (定義は次のスライド)。

証明　後で f が正則ならば、f は何回でも微分可能であるという定理を証明する。先走ってそれを認めると、u と v は C^∞ 級である。

2.5.3 正則関数と調和関数

次は非常に有名で重要な結果 (例えば「応用複素関数」では頻出)。

定理 7.5 (正則関数の実部虚部は調和関数である)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とするとき、f の実部・虚部 u, v は

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \left(\text{in } \widetilde{\Omega} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + iy \in \Omega\right\}\right)$$

を満たす。すなわち u と v は調和関数である (定義は次のスライド)。

証明　後で f が正則ならば、f は何回でも微分可能であるという定理を証明する。先走ってそれを認めると、u と v は C^∞ 級である。
Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つので、

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

最後の等号が成り立つのは、v が C^2 級であることによる (v の 2 階偏導関数は偏微分の順序によらない)。

2.5.3 正則関数と調和関数

次は非常に有名で重要な結果 (例えば「応用複素関数」では頻出)。

定理 7.5 (正則関数の実部虚部は調和関数である)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は正則とするとき、f の実部・虚部 u, v は

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \left(\text{in } \widetilde{\Omega} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + iy \in \Omega\right\}\right)$$

を満たす。すなわち u と v は調和関数である (定義は次のスライド)。

証明 後で f が正則ならば、f は何回でも微分可能であるという定理を証明する。先走ってそれを認めると、u と v は C^∞ 級である。
Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つので、

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

最後の等号が成り立つのは、v が C^2 級であることによる (v の 2 階偏導関数は偏微分の順序によらない)。
同様にして $v_{xx} + v_{yy} = 0$ も証明できる。 □

2.5.3 正則関数と調和関数

$\mathbb{R}^n$ の開集合 Ω で定義された関数 $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{1}$$

を満たすとき、u は**調和関数** (harmonic function) であるという。

2.5.3 正則関数と調和関数

$\mathbb{R}^n$ の開集合 Ω で定義された関数 $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{1}$$

を満たすとき、u は**調和関数** (harmonic function) であるという。また (1) を **Laplace 方程式** (Laplace equation) とよぶ。

2.5.3 正則関数と調和関数

$\mathbb{R}^n$ の開集合 Ω で定義された関数 $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{1}$$

を満たすとき、u は**調和関数** (harmonic function) であるという。また (1) を **Laplace 方程式** (Laplace equation) とよぶ。

$$\triangle := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \tag{2}$$

で定義される微分作用素 $\triangle$ を **Laplace 作用素**とよぶ。これを用いると (1) は

$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{3}$$

と表せる。

2.5.3 正則関数と調和関数

$\mathbb{R}^n$ の開集合 Ω で定義された関数 $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が

(1)
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

を満たすとき、u は**調和関数** (harmonic function) であるという。また (1) を **Laplace 方程式** (Laplace equation) とよぶ。

(2)
$$\triangle := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

で定義される微分作用素 $\triangle$ を **Laplace 作用素**とよぶ。これを用いると (1) は

(3)
$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

と表せる。
$\triangle$ のことを ∇^2 と書くことも多い ($\triangle u = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, u) = \nabla \cdot (\nabla u)$ であるから)。
上の定理は「正則関数の実部と虚部は調和関数である」と手短に述べられる。

2.5.3 正則関数と調和関数

$\mathbb{R}^n$ の開集合 Ω で定義された関数 $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ が

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{1}$$

を満たすとき、u は**調和関数** (harmonic function) であるという。また (1) を **Laplace 方程式** (Laplace equation) とよぶ。

$$\triangle := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \tag{2}$$

で定義される微分作用素 $\triangle$ を **Laplace 作用素**とよぶ。これを用いると (1) は

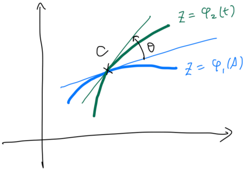
$$\triangle u = 0 \quad (\text{in } \Omega) \tag{3}$$

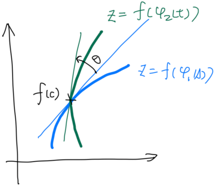
と表せる。
$\triangle$ のことを ∇^2 と書くことも多い ($\triangle u = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, u) = \nabla \cdot (\nabla u)$ であるから)。
上の定理は「正則関数の実部と虚部は調和関数である」と手短に述べられる。

$\mathbb{R}^2$ の開集合で定義された 2 つの調和関数 u, v が Cauchy-Riemann 方程式を満たすとき、v を u の**共役調和関数** (conjugate harmonic function of u) とよぶ。「正則関数の虚部は実部の共役調和関数である」ということになる。

2.5.4 等角性

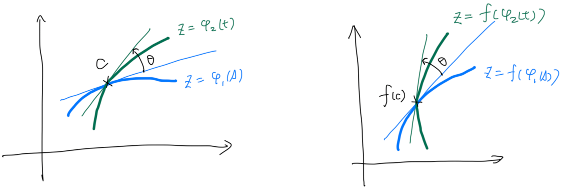
正則関数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ は、$f'(c) \neq 0$ であれば、c で交わる任意の 2 曲線を $f'(c)$ で交わる 2 曲線に写し、その交角を変えないという性質 (等角性) を持つ。





2.5.4 等角性

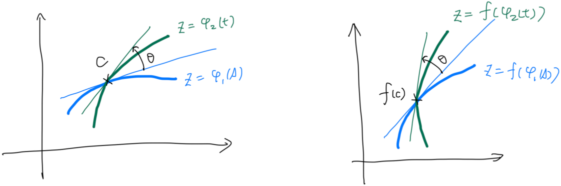
正則関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は、$f'(c) \neq 0$ であれば、c で交わる任意の 2 曲線を $f'(c)$ で交わる 2 曲線に写し、その交角を変えないという性質 (等角性) を持つ。



一般に、定義域 Ω 全体で $f' \neq 0$ を満たす正則関数 f を**等角写像** (conformal mapping) と呼ぶ。

2.5.4 等角性

正則関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は、$f'(c) \neq 0$ であれば、c で交わる任意の 2 曲線を $f'(c)$ で交わる 2 曲線に写し、その交角を変えないという性質 (等角性) を持つ。



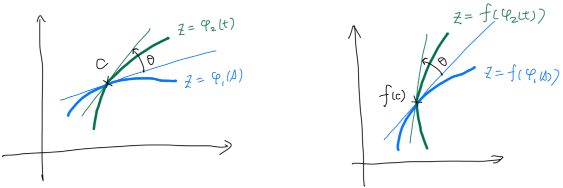
一般に、定義域 Ω 全体で $f' \neq 0$ を満たす正則関数 f を**等角写像** (conformal mapping) と呼ぶ。

$\boldsymbol{f}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, c \\ \mathrm{Im}\, c \end{pmatrix}$ とおくと、$\boldsymbol{f}\colon \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}^2$, さらに

$$f \text{ が } c \text{ で微分可能} \Leftrightarrow \boldsymbol{f} \text{ が } \boldsymbol{c} \text{ で微分可能で } (\exists p, q \in \mathbb{R})\ \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}.$$

2.5.4 等角性

正則関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は、$f'(c) \neq 0$ であれば、c で交わる任意の 2 曲線を $f'(c)$ で交わる 2 曲線に写し、その交角を変えないという性質 (等角性) を持つ。



一般に、定義域 Ω 全体で $f' \neq 0$ を満たす正則関数 f を**等角写像** (conformal mapping) と呼ぶ。

$\boldsymbol{f}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, c \\ \mathrm{Im}\, c \end{pmatrix}$ とおくと、$\boldsymbol{f}\colon \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}^2$, さらに

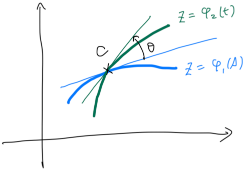
$$f \text{ が } c \text{ で微分可能} \Leftrightarrow \boldsymbol{f} \text{ が } \boldsymbol{c} \text{ で微分可能で } (\exists p, q \in \mathbb{R})\ \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}.$$

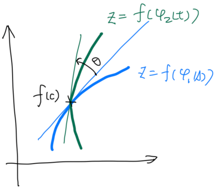
なぜならば、$\boldsymbol{f}'(x,y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ で、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つから。ゆえに

$$\det \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = \left| f'(c) \right|^2 \tag{4}$$

2.5.4 等角性

正則関数 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ は、$f'(c) \neq 0$ であれば、c で交わる任意の 2 曲線を $f'(c)$ で交わる 2 曲線に写し、その交角を変えないという性質 (等角性) を持つ。





一般に、定義域 Ω 全体で $f' \neq 0$ を満たす正則関数 f を**等角写像** (conformal mapping) と呼ぶ。

$\boldsymbol{f}(x,y) := \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, c \\ \mathrm{Im}\, c \end{pmatrix}$ とおくと、$\boldsymbol{f}\colon \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}^2$, さらに

$$f \text{ が } c \text{ で微分可能} \Leftrightarrow \boldsymbol{f} \text{ が } \boldsymbol{c} \text{ で微分可能で } (\exists p, q \in \mathbb{R})\ \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}.$$

なぜならば、$\boldsymbol{f}'(x,y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ で、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つから。ゆえに

$$\det \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = \left| f'(c) \right|^2 \quad (= p^2 + q^2). \tag{4}$$

2.5.4 等角性

$f'(c) = p + qi \neq 0$ を仮定して、$f'(c)$ の偏角を θ とすると

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} = \sqrt{p^2 + q^2} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{(回転と拡大)}.$$

ゆえに

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}) \fallingdotseq \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c})\boldsymbol{h}$$

の右辺は、$\boldsymbol{h}$ の長さを $\sqrt{p^2 + q^2}$ 倍、角度 θ だけ回転したものである。

一般に 1 次変換は、正方形を平行四辺形に写す (歪みが生じることもある) が、
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は正方形を正方形に写す (歪まない)。
以上で、等角性が成り立つことが示された。

2.5.5 逆関数定理

定理 7.6 (正則関数の逆関数定理 (弱い形))

f が正則で、f' が連続かつ $f'(c) \neq 0$ であれば、c の十分小さな開近傍 (c を含む開集合) で正則な逆関数が存在する。

2.5.5 逆関数定理

定理 7.6 (正則関数の逆関数定理 (弱い形))

f が正則で、f' が連続かつ $f'(c) \neq 0$ であれば、c の十分小さな開近傍 (c を含む開集合) で正則な逆関数が存在する。

証明　微積分に「逆関数定理」がある。$\boldsymbol{f}$ が C^1 級で、$\det \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) \neq 0$ ならば、$\boldsymbol{c}$ を含む十分小さな開集合 $\widetilde{U}$ では $\boldsymbol{f}$ は単射で、

$$\boldsymbol{f}|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{f}(\widetilde{U})$$

の C^1 級の逆写像が存在する、という内容である。それを認めることにする。

2.5.5 逆関数定理

定理 7.6 (正則関数の逆関数定理 (弱い形))

f が正則で、f' が連続かつ $f'(c) \neq 0$ であれば、c の十分小さな開近傍 (c を含む開集合) で正則な逆関数が存在する。

証明　微積分に「逆関数定理」がある。$\boldsymbol{f}$ が C^1 級で、$\det \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) \neq 0$ ならば、$\boldsymbol{c}$ を含む十分小さな開集合 $\widetilde{U}$ では $\boldsymbol{f}$ は単射で、

$$\boldsymbol{f}|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{f}(\widetilde{U})$$

の C^1 級の逆写像が存在する、という内容である。それを認めることにする。

$f'(c) \neq 0$ を満たす正則関数 f に対応する $\boldsymbol{f}$ については ($f'(c) = p + iq$ ($p, q \in \mathbb{R}$) とおいて)

$$\det \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = \left|f'(c)\right|^2 \neq 0, \quad \left(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c})\right)^{-1} = \frac{1}{p^2 + q^2} \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}.$$

これから、対応する f の局所的逆関数 $\left(f|_U\right)^{-1}$ は、Cauchy-Riemann 方程式を満たす。

2.5.5 逆関数定理

定理 7.6 (正則関数の逆関数定理 (弱い形))

f が正則で、f' が連続かつ $f'(c) \neq 0$ であれば、c の十分小さな開近傍 (c を含む開集合) で正則な逆関数が存在する。

証明　微積分に「逆関数定理」がある。$\boldsymbol{f}$ が C^1 級で、$\det \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) \neq 0$ ならば、$\boldsymbol{c}$ を含む十分小さな開集合 $\widetilde{U}$ では $\boldsymbol{f}$ は単射で、

$$\boldsymbol{f}|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{f}(\widetilde{U})$$

の C^1 級の逆写像が存在する、という内容である。それを認めることにする。

$f'(c) \neq 0$ を満たす正則関数 f に対応する $\boldsymbol{f}$ については ($f'(c) = p + iq$ ($p, q \in \mathbb{R}$) とおいて)

$$\det \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = \left|f'(c)\right|^2 \neq 0, \quad \left(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c})\right)^{-1} = \frac{1}{p^2 + q^2} \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}.$$

これから、対応する f の局所的逆関数 $\left(f|_U\right)^{-1}$ は、Cauchy-Riemann 方程式を満たす。ゆえに $\left(f|_U\right)^{-1}$ は正則関数である。 □

2.5.5 逆関数定理

定理 7.6 (正則関数の逆関数定理 (弱い形))

f が正則で、f' が連続かつ $f'(c) \neq 0$ であれば、c の十分小さな開近傍 (c を含む開集合) で正則な逆関数が存在する。

証明　微積分に「逆関数定理」がある。$\boldsymbol{f}$ が C^1 級で、$\det \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) \neq 0$ ならば、$\boldsymbol{c}$ を含む十分小さな開集合 $\widetilde{U}$ では $\boldsymbol{f}$ は単射で、

$$\boldsymbol{f}|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{f}(\widetilde{U})$$

の C^1 級の逆写像が存在する、という内容である。それを認めることにする。

$f'(c) \neq 0$ を満たす正則関数 f に対応する $\boldsymbol{f}$ については ($f'(c) = p + iq$ $(p, q \in \mathbb{R})$ とおいて)

$$\det \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c}) = \left|f'(c)\right|^2 \neq 0, \quad \left(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{c})\right)^{-1} = \frac{1}{p^2 + q^2} \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}.$$

これから、対応する f の局所的逆関数 $\left(f|_U\right)^{-1}$ は、Cauchy-Riemann 方程式を満たす。ゆえに $\left(f|_U\right)^{-1}$ は正則関数である。 □

後で「f が正則ならば、f は無限回微分可能」という定理を証明するので、定理の仮定に「f' が連続」を書く必要はなくなる。

宿題 (問 4) について

とある年度の期末試験で、複素関数 $\dfrac{1}{z}$ の原始関数が $\log|z|$ とする人がかなりの数出現した。現時点 (というより前回の段階？) で間違いであることが難しくなく理解できる (はずなのに)。

この段階で宿題のネタにすると良いかもしれない、と考えて次の問題を出題する。

問題　$f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ を $f(z)=\log|z|$ $(z\in\mathbb{C}\setminus\{0\})$ で定める。ただし、$\log\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R}$ は、微積分に現われる (高校生も知っている) 実関数である。f はいたるところで微分出来ないことを示せ。

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2020/complex2020.pdf (2014〜).