複素関数・同演習 第6回

〜複素関数の微分、正則性、Cauchy-Riemann 方程式 〜

かつらだ まさし
桂田 祐史

2020 年 10 月 7 日

目次

本日の内容・連絡事項

- Zoom オフィスアワーを月曜 12:30–13:30, 水曜 16:00–17:00 に設けます。参加するための情報は「シラバスの補足」に書いておきました。
- 講義ノート [1] の §2.4, 2.5 を解説する。
  §2.4 は「〜と同様」ばかりで少しユルい話である (一度真剣に聴けばそれで済むだろう)。
  §2.5 の Cauchy-Riemann 方程式はいよいよ複素関数の本論に突入。目を覚まして聴いて下さい。§2.5 は少し長めの話になります。
- 宿題 3 を出します (締め切りは 10 月 13 日 13:30)。「複素関数演習」のレポートを見て下さい。今回から翌週解説するので、原則提出の遅延は認めません。
- 「複素関数」の授業内容・資料は「学生・教職員」に公開するようにしました。

2.4 微分、正則性　2.4.1 定義

定義 6.1 (微分可能, 正則)

簡単のため、Ω は $\mathbb{C}$ の開集合とし、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $c \in \Omega$ とする。f が c で**微分可能** (differentiable) であるとは、極限

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

が存在することをいう。このときこの極限を $f'(c)$ と表し、f の c における**微分係数** (the derivative of f at c) と呼ぶ。**導関数** (derivative, derived function) などの言葉の使い方は、実関数のときと同様に定義する。

　Ω の任意の点 z に対して、f が z で微分可能であるとき、f は Ω で**正則** (regular, 整型, holomorphic) であるという。

2.4.2 例

例 6.2 (正則な関数の例)

$f(z)=\gamma$ (定数関数) と $g(z)=z$ は、$\mathbb{C}$ 全体で定義されて正則である。

実際、任意の $z\in\mathbb{C}$ に対して

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\gamma-\gamma}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

であるから、f は z で微分可能で $f'(z)=0$. f は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。

また

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(z+h)-g(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{z+h-z}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

であるから、g は z で微分可能で $g'(z)=1$. g は $\mathbb{C}$ 全体で正則である。

2.4.3 微分可能な関数の和・差・積・商

命題 6.3 (微分可能な関数の和・差・積・商)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$c \in \Omega$ とする。$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ と $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ が c で微分可能ならば、$f+g$, $f-g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ (ただし $g(c) \neq 0$ とする) も c で微分可能であり、

$$
\begin{aligned}
(f+g)'(c) &= f'(c) + g'(c),\\
(f-g)'(c) &= f'(c) - g'(c),\\
(fg)'(c) &= f'(c)g(c) + f(c)g'(c),\\
\left(\frac{f}{g}\right)'(c) &= \frac{g(c)f'(c) - g'(c)f(c)}{g(c)^2}.
\end{aligned}
$$

証明.

実関数の場合と同様である。 □

2.4.4 多項式と有理関数の正則性

系 6.4 (多項式と有理関数の正則性)

1. 任意の自然数 k に対して、$f(z)=z^k$ は $\mathbb{C}$ で正則で、$f'(z)=kz^{k-1}$.
2. 任意の複素係数多項式の定める関数は $\mathbb{C}$ 上で正則である。
$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} z^j.$$
(2 つめの等式がすらすら導けるように。「$k-1=j$ とおくと…」)
3. 任意の複素係数有理式 $r(z)=\dfrac{q(z)}{p(z)}$ ($p(z), q(z)\in\mathbb{C}[z]$, $p(z)$ は零多項式ではない) の定める関数 $r\colon \Omega := \{z\in\mathbb{C} \mid p(z)\neq 0\} \ni z \mapsto r(z)\in\mathbb{C}$ は正則である。

2.4.5 合成関数の微分法と逆関数の微分法

合成関数の微分法　f と g が合成可能で、f が c で、g が $f(c)$ で微分可能ならば、$g\circ f$ は c で微分可能で

(1) $$(g\circ f)'=g'(f(c))f'(c).$$

あるいは $w=f(z)$, $\zeta=g(w)$ とするとき、合成関数 $\zeta=g(f(z))$ について

(2) $$\frac{d\zeta}{dz}=\frac{d\zeta}{dw}\frac{dw}{dz}.$$

逆関数の微分法

(3) $$\frac{dz}{dw}=\frac{1}{\dfrac{dw}{dz}}\quad (\text{ただし } dw/dz\neq 0 \text{ とする})$$

も成り立つ (逆関数定理が重要だが、それは §2.5.5 で説明する)。

定理 6.5 (複素関数が微分可能 ⇔ 実部・虚部が微分可能かつ Cauchy-Riemann 方程式)

Ω は $\mathbb{C}$ の開集合、$f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $c = a + bi \in \Omega$ $(a, b \in \mathbb{R})$ とする。f が c で微分可能であるためには、f の実部 u と虚部 v が (a, b) で (全) 微分可能でかつ

$$(\star) \qquad u_x(a,b) = v_y(a,b), \quad u_y(a,b) = -v_x(a,b)$$

を満たすことが必要十分である。

$(\star)$ を **Cauchy-Riemann の方程式** (the Cauchy-Riemann equations, the Cauchy-Riemann relations) と呼ぶ。

(復習) f の実部 u, 虚部 v は、$u\colon \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$, $v\colon \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}$,

$$u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+yi), \quad v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+yi) \quad ((x,y) \in \widetilde{\Omega})$$

で定義される関数である。ただし

$$\widetilde{\Omega} := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + yi \in \Omega\right\}.$$

2.5.1 微分可能性の必要十分条件　例

例 6.6 (正則関数が Cauchy-Riemann 方程式を満たすことを見る)

正則な $f(z) = z^2$ $(z \in \mathbb{C})$, $f(z) = \dfrac{1}{z}$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$, $f(z) = e^z$ などが、Cauchy-Riemann 方程式を満たすこと確かめてみよう。

例 6.7 (微分可能でないことの証明に使ってみる)

$f(z)=\mathrm{Re}\,z$, $f(z)=\mathrm{Im}\,z$, $f(z)=|z|$, $f(z)=\mathrm{Arg}\,z$ $(z\in\mathbb{C}\setminus\{0\})$, $f(z)=\bar{z}$ はいたるところ微分可能でない。これらは微分可能性の定義に戻って証明することも出来るが、上の定理を用いるのも簡単である。

$f(z)=|z|$ の場合に証明してみよう。
実部 $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, 虚部 $v(x,y)=0$ である。

- (a) $(x,y)\neq(0,0)$ のとき、$u_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $u_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $v_x=0$, $v_y=0$ である。$x\neq 0$ のとき $u_x\neq 0=v_y$, $y\neq 0$ のとき $u_y\neq 0=-v_x$. ゆえに任意の点で Cauchy-Riemann 方程式は成り立たない。
- (b) $(x,y)=(0,0)$ のとき、u は偏微分可能でないので、(全) 微分可能でもない。

(a), (b) より、任意の点 (x,y) において、「u と v は (全) 微分可能で、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つ」という条件は満たさない。ゆえに f は微分可能でない。 □

定理 6.5 の証明前に、微分可能性から Cauchy-Riemann 方程式を導く簡潔な方法を紹介する。

f が $c = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ で微分可能ならば、u と v は (a, b) で偏微分可能で、

$$(\sharp) \qquad f'(c) = u_x(a,b) + iv_x(a,b) = \frac{1}{i}\left(u_y(a,b) + iv_y(a,b)\right)$$

が成り立つ。特に実部・虚部を比較して $u_x(a,b) = v_y(a,b)$, $u_y(a,b) = -v_x(a,b)$.
($(\sharp)$ を $f' = f_x = \dfrac{1}{i} f_y$ と書く人もいる。記号の濫用だが[1] 分かりやすいかも。)

証明　f が c で微分可能とは、

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

が存在することであるが、$h = h_x + ih_y$ $(h_x, h_y \in \mathbb{R})$ の動く範囲を次の二通りに制限した場合を考える。

[1] うるさく言うと、f は変数 z の複素関数であって、変数 x, y の関数ではないので、f_x, f_y という書き方は変である。

(a) $h_y=0$ のとき (水平移動)、すなわち $h=h_x$ ($h_x\in\mathbb{R}$) (実数の値だけを取る)
$f(c+h_x)=u(a+h_x,b)+iv(a+h_x,b)$ に注意すると、

$$f'(c)=\lim_{\substack{h_x\to0\\h_x\in\mathbb{R}}}\frac{f(c+h_x)-f(c)}{h_x}=\lim_{h_x\to0}\frac{(u(a+h_x,b)+iv(a+h_x,b))-(u(a,b)+iv(a,b))}{h_x}$$

$$=\lim_{h_x\to0}\left(\frac{u(a+h_x,b)-u(a,b)}{h_x}+i\frac{v(a+h_x,b)-v(a,b)}{h_x}\right)=u_x(a,b)+iv_x(a,b).$$

(b) $h_x=0$ のとき (垂直移動)、すなわち $h=ih_y$ ($h_y\in\mathbb{R}$) (純虚数の値だけを取る)
$f(c+ih_y)=u(a,b+h_y)+iv(a,b+h_y)$ に注意すると、

$$f'(c)=\lim_{\substack{h_y\to0\\h_y\in\mathbb{R}}}\frac{f(c+ih_y)-f(c)}{ih_y}=\lim_{h_y\to0}\frac{(u(a,b+h_y)+iv(a,b+h_y))-(u(a,b)+iv(a,b))}{ih_y}$$

$$=\frac{1}{i}\lim_{h_y\to0}\left(\frac{u(a,b+h_y)-u(a,b)}{h_y}+i\frac{v(a,b+h_y)-v(a,b)}{h_y}\right)=\frac{1}{i}\left(u_y(a,b)+iv_y(a,b\right.$$

以上から

$$f'(c)=u_x(a,b)+iv_x(a,b)=\frac{1}{i}\left[u_y(a,b)+iv_y(a,b)\right]=v_y(a,b)-iu_y(a,b).$$

実部・虚部を比較して、

$$u_x(a,b)=v_y(a,b),\quad v_x(a,b)=-iu_y(a,b).\quad\square$$

定理 6.5 の証明
f が c で微分可能であるとは

$$(\exists p, q \in \mathbb{R}) \quad \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - (p + iq) \right| = 0$$

が成り立つことを意味する。方針: u, v, p, q で表す。
$h = h_x + ih_y$ $(h_x, h_y \in \mathbb{R})$ とおくと

$$\begin{aligned} f(c+h) - f(c) &= u(a+h_x, b+h_y) - u(a,b) + i\left(v(a+h_x, b+h_y) - v(a,b)\right), \\ (p+iq)h &= (p+iq)(h_x + ih_y) = (ph_x - qh_y) + i(qh_x + ph_y) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - (p+iq) \right| \\ &\quad = \frac{|f(c+h) - f(c) - (p+iq)h|}{|h|} \\ &\quad = \left| \frac{u(a+h_x, b+h_y) - u(a,b) - (ph_x - qh_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} + i \frac{v(a+h_x, b+h_y) - v(a,b) - (qh_x + ph_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} \right|. \end{aligned}$$

ゆえに

f が c で微分可能

$$\Leftrightarrow (\exists p, q \in \mathbb{R}) \lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)} \frac{u(a+h_x, b+h_y) - u(a,b) - (ph_x - qh_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = 0$$

$$\text{かつ} \lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)} \frac{v(a+h_x, b+h_y) - v(a,b) - (qh_x + ph_y)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}} = 0$$

$\Leftrightarrow (\exists p, q \in \mathbb{R})$ 　u と v は (a,b) で (全) 微分可能で
$u_x(a,b) = p,\ u_y(a,b) = -q,\ v_x(a,b) = q,\ v_y(a,b) = p$

$\Leftrightarrow$ u と v は (a,b) で (全) 微分可能で $u_x(a,b) = v_y(a,b), \quad u_y(a,b) = -v_x(a,b).$ □

参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2020/complex2020.pdf (2014〜).