

複素関数・同演習 第5回

～ n 乗根(補足), 複素関数の極限・連続性～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2020年10月6日

目次

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 複素数の定義と基本的な性質 (続き)
 - n 乗根 (続き)
 - まとめ $+\alpha$
 - 補足 $\sqrt[n]{c}$ という記号について
 - \mathbb{C} の距離、複素数列の収束
- 3 複素関数とその極限、連続性、正則性
 - 複素関数の実部・虚部
 - 定義
 - 例
 - 良く使う記号・用語 (極限に向けて)
 - 極限, 連続性
 - 定義
 - 実関数の極限・連続性への翻訳
 - 複素関数の和・差・積・商の極限・連続性
- 4 参考文献

本日の内容・連絡事項

- Zoom オフィスアワーを月曜 12:30–13:30, 水曜 16:00–17:00 に設ける。参加するための情報は「シラバスの補足」に書いておいた。
- 本日は、 n 乗根について前回の残りど、講義ノート [1] の §1.12, 2.1, 2.2, 2.3 を解説する。多変数関数の極限・連続性の話(「数学解析」で解説した)の見かけを変えただけと考えることができる。
- 今日は宿題 1 の解説をする。(今後、毎週「複素関数」で宿題の解説をする予定。来週は宿題 2,3 の解説をする。)
- 宿題 3 を出します(締め切りは 10 月 13 日 13:30)。「複素関数演習」のレポートとして提出して下さい。

(「複素関数演習」を理由していない人は、授業 WWW サイト <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/> にある課題文 PDF を見て、Meiji Mail を使って katurada あつと meiji ひとつ ac ドット jp 宛にメールで提出すること。)

1.11 n 乗根 1.11.4 まとめ+ α

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ とする。0 の n 乗根は 0 のみ。 $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$ とする。

c の n 乗根は全部で n 個存在し、極形式で表せる。(だから、実逆三角関数&実三角関数を使えば、 $x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) の形に表せる。)

平方根 ($n = 2$ のとき) は、逆三角・三角関数を使わずに、 $\sqrt{\text{正の数}}$ で表せる。

— 以上は説明済み。

立方根 ($n = 3$ のとき) は、 $\sqrt[3]{\text{実数}}$ を使って表せないことがある。実際、 $c = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) として $(x + yi)^3 = a + bi$ を解こうとすると、行き詰まる。

1.11.5 補足 $\sqrt[n]{c}$ という記号について

(混乱する人がいるかもしれないので、1枚にまとめてみる。)

$c \in \mathbb{R}$ の場合は、記号 $\sqrt[n]{c}$ について、多くの人が認めるルールがある。

- n が奇数のとき、任意の実数 c に対して $x^n = c$ を満たす実数 x がただ一つ存在する。それを $\sqrt[n]{c}$ で表す。
- n が偶数のとき、任意の $c \geq 0$ に対して、 $x^n = c$ を満たす実数 $x \geq 0$ がただ一つ存在する。それを $\sqrt[n]{c}$ で表す。

$c < 0$ のときは? $n = 2$ のとき $\sqrt[n]{c} = \sqrt{c} = \sqrt{-c}i$ とするのが、高校数学のルールであったが、この講義では $\sqrt[n]{c}$ の一般的定義はしないことにする ($n = 2$ のときの真似(?)をして、 $\sqrt[n]{|c|}e^{i\pi/n}$ と定義する手はあるが…)。

c が虚数のとき、 $\sqrt[n]{c}$ が、 n 個の n 乗根のうちどれを表すか決める、一般的に使える良いルールがない。だから無理にルールは決めないことにする。後で $w = \sqrt{z}$ という関数の話をするので、そのときもう一度取り上げる。 $\sqrt[n]{c}$ を使うときは、その都度適当なルールを選ぶこと。

2次方程式の解の公式を使う場合、 $(\pm\sqrt{D})$ の形なので) どのルールでも問題ない。

1.11.5 補足 $\sqrt[3]{c}$ という記号について

(このスライドの話は細かいので、スルーしても良い。前のスライドで、 $\sqrt[3]{c}$ の定義についてうるさいことを言っているけれど必要があるの?、という人は読んで下さい。)

具体的な問題として、3次方程式 $x^3 + px + q = 0$ に対する Cardano の公式

$$(1) \quad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}, \quad \Delta := -(27q^2 + 4p^3)$$

を取り上げる。簡単のため、まず $p, q \in \mathbb{R}$ の場合を考える。

$\Delta \leq 0$ の場合は、 $\sqrt{\text{非負実数}}$ と $\sqrt[3]{\text{実数}}$ しか出て来ない。前のスライドに書いたルールで解釈して問題がない(ことが分かる)。

$\Delta > 0$ の場合は、 $\sqrt{\text{負の実数}}$ と $\sqrt[3]{\text{虚数}}$ が現れて、その値をどう選択するか問題となる。(1) に2つある $\sqrt[3]{\quad}$ の値は、 $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\quad}} = -\frac{p}{3}$ を満たすように選ばないと、 x は3次方程式の解にならない。それを考えると、(1) はむしろ

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}} + \frac{-p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-\Delta}{108}}}}$$

と書く方がいいのかもしれない(もちろん $\sqrt[3]{\quad} = \sqrt[3]{\quad}$ とする)。

p, q が虚数の場合も、 $\sqrt[3]{\quad}$ の値の選択をきちんとすれば、(1) の x は解となる。

1.12 \mathbb{C} の距離、複素数列の収束

一言でまとめると: \mathbb{R}^2 と同じ。複素数列の収束は \mathbb{R}^2 の点列の収束と同じで、実部・虚部の作る数列の収束と同じ。 \mathbb{R}^2 については「知っている」ことになっているので、 \mathbb{C} についても「同様に分かる」ことにする。

任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して、 $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) となる x, y を取って、 $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと、 $z \in \mathbb{R}^2$ であり

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$$

これから、 \mathbb{C} における 2 点の距離と、 \mathbb{R}^2 における対応する 2 点の距離は等しい:

$$|z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|.$$

\mathbb{C} と \mathbb{R}^2 は距離まで込めて対応している。

複素数列 $\{z_n\}$, $c \in \mathbb{C}$ に対して、

$$x_n := \operatorname{Re} z_n, \quad y_n := \operatorname{Im} z_n, \quad \mathbf{z}_n := \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad a := \operatorname{Re} c, \quad b := \operatorname{Im} c, \quad \mathbf{c} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c &\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - c| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{z}_n - \mathbf{c}| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{z}_n = \mathbf{c} \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b. \end{aligned}$$

2 複素関数とその極限、連続性、正則性

2.1 複素関数の実部・虚部

いよいよ複素関数を調べ始めよう。

定義 5.1 (複素関数の実部・虚部)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ とする。関数 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、 f の**実部** u , **虚部** v を

$$(2) \quad u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + yi), \quad v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + yi) \quad ((x, y) \in \tilde{\Omega}).$$

で定める。ただし

$$(3) \quad \tilde{\Omega} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + yi \in \Omega\}.$$

$u: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $v: \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ である。(メモ: 面倒がらずに $\tilde{\Omega}$ は図を描いて説明すること。)

こうして実部・虚部に分解してしまえば、極限と連続性については、実2変数の関数のそれと同じである(数学解析を復習すると良い。桂田 [2] を見よ。)

2.1 複素関数の実部・虚部

例 5.2

① $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ とするとき ($\Omega = \mathbb{C}$, $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}^2$)

$$f(x + yi) = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

ゆえに

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

② $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$ とするとき ($\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$)

$$f(x + yi) = \frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{(x + yi)(x - yi)} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}.$$

ゆえに

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

2.1 複素関数の実部・虚部

例 5.2 (つづき)

③ $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$ とするとき

$$f(x + yi) = e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

ゆえに

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

2.2 良く使う記号・用語 (極限に向けて)

\mathbb{R}^2 の場合と本質的に同じである。記号が少し違うくらい (数学解析では、 a 中心, 半径 r の開円盤は $B(a; r)$ と書いた)。

- ① $c \in \mathbb{C}, r > 0$ に対して

$$D(c, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < r\}.$$

c を中心とする半径 r の開円盤 (an open disk) とよぶ。

- ② $\Omega \subset \mathbb{C}$ に対して

$$\bar{\Omega} := \{z \in \mathbb{C} \mid (\forall \varepsilon > 0) D(z; \varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset\}$$

とおき、 Ω の閉包 (the closure of Ω) とよぶ。

- ③ $\Omega \subset \mathbb{C}$ に対して

- Ω が \mathbb{C} の開集合 (open set) とは、

$$(\forall z \in \Omega)(\exists \varepsilon > 0) \quad D(z; \varepsilon) \subset \Omega$$

が成り立つことをいう。

- Ω が \mathbb{C} の閉集合 (closed set) とは、 Ω の補集合 $\Omega^c = \{z \in \mathbb{C} \mid z \notin \Omega\}$ が \mathbb{C} の開集合であることをいう。

定義 5.3 (複素関数の極限、連続性)

$\Omega \subset \mathbb{C}$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ とする。

① $c \in \overline{\Omega}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ とする。 $z \rightarrow c$ のとき $f(z)$ が γ に**収束する**とは

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega : |z - c| < \delta) \quad |f(z) - \gamma| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう。このことを $f(z) \rightarrow \gamma$ と表す。

(このような γ は存在すれば一意的なので) γ を $f(z)$ の $z \rightarrow c$ のときの**極限**とよび、 $\lim_{z \rightarrow c} f(z)$ で表す。

定義 5.3 (複素関数の極限、連続性 (つづき))

$\Omega \subset \mathbb{C}$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ とする。

- ② $c \in \Omega$ とする。 f が c で連続であるとは

$$\lim_{z \rightarrow c} f(z) = f(c)$$

が成り立つことをいう。 ε - δ 論法で表すと

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \Omega : |z - c| < \delta) \quad |f(z) - f(c)| < \varepsilon.$$

- ③ f が Ω で連続とは、 f が任意の点 $c \in \Omega$ で連続なことをいう。

2.3.2 実関数の極限・連続性への翻訳

複素関数の極限・連続性は、実部・虚部の極限・連続性に翻訳できる。

$$x := \operatorname{Re} z, \quad y := \operatorname{Im} z, \quad z := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\alpha := \operatorname{Re} \gamma, \quad \beta := \operatorname{Im} \gamma, \quad \gamma := \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

$$a := \operatorname{Re} c, \quad b := \operatorname{Im} c, \quad c := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$u(x, y) := \operatorname{Re} f(x + yi), \quad v(x, y) := \operatorname{Im} f(x + yi), \quad f(x, y) := \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\lim_{z \rightarrow c} f(z) = \gamma \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow c} f(z) = \gamma \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} u(x, y) = \alpha \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} v(x, y) = \beta. \end{cases}$$

ゆえに

f が c で連続 $\Leftrightarrow f$ が c で連続 $\Leftrightarrow u$ と v が (a, b) で連続.

「 c で」を「 Ω で」、「 c で」と「 (a, b) で」を「 $\tilde{\Omega}$ で」に変えても成立する。ただし、 $\tilde{\Omega} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + yi \in \Omega\}$.

2.3.2 実関数の極限・連続性への翻訳

例 5.4

指数関数 $f(z) = e^z$ については、実部 $u(x, y) = e^x \cos y$, 虚部 $v(x, y) = e^x \sin y$ が \mathbb{R}^2 で連続である。ゆえに f は \mathbb{C} で連続である。

2.3.3 複素関数の和・差・積・商の極限・連続性

命題 5.5 (複素関数の和・差・積・商の極限)

$\Omega \subset \mathbb{C}$, $c \in \overline{\Omega}$. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ が $z \rightarrow c$ のとき極限を持つとき、

$$\lim_{z \rightarrow c} (f(z) + g(z)) = \lim_{z \rightarrow c} f(z) + \lim_{z \rightarrow c} g(z),$$

$$\lim_{z \rightarrow c} (f(z) - g(z)) = \lim_{z \rightarrow c} f(z) - \lim_{z \rightarrow c} g(z),$$

$$\lim_{z \rightarrow c} (f(z)g(z)) = \lim_{z \rightarrow c} f(z) \cdot \lim_{z \rightarrow c} g(z),$$

$$\lim_{z \rightarrow c} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow c} f(z)}{\lim_{z \rightarrow c} g(z)} \quad (\text{ただし } \lim_{z \rightarrow c} g(z) \neq 0 \text{ とする}).$$

証明 (方針のみ) 「数学解析」で実多変数関数の場合の命題を紹介した。その証明と同様に証明できる。

別証明 (方針のみ) 対応する実2変数関数 (実部、虚部) を考えて、その極限の性質に帰着させることも出来る。例えば、 $f = u_1 + iv_1$, $g = u_2 + iv_2$, $fg = u_3 + iv_3$ とするとき、 $fg = (u_1 + iv_1)(u_2 + iv_2) = u_3 + iv_3$ より $u_3 = u_1u_2 - v_1v_2$, $v_3 = u_1v_2 + v_1u_2$ であり、 u_3 と v_3 は、 u_1, u_2, v_1, v_2 から和・差・積で出来ているので収束する。ゆえに fg は… \square

2.3.3 複素関数の和・差・積・商の極限・連続性

系 5.6

連続な複素関数の和・差・積・商(ただし商の場合は分母が0にならない範囲で考える)は連続である。

この応用、あるいは系として、以下が得られる。

複素係数の多項式

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \quad (a_0, a_1, \dots, a_n \text{ は複素数の定数})$$

に対して多項式関数 $P: \mathbb{C} \ni z \mapsto P(z) \in \mathbb{C}$ は連続である。

z を変数とする複素係数多項式全体の集合を $\mathbb{C}[z]$ で表す。

複素係数の有理式

$$r(z) = \frac{q(z)}{p(z)} \quad (p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z], p(z) \neq 0)$$

に対して、有理関数 $r: \Omega \ni z \mapsto r(z) \in \mathbb{C}$, $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid p(z) \neq 0\}$ は連続である。

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート.
<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2020/complex2020.pdf> (2014～).
- [2] 桂田祐史：数学解析, <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/kaiseki-2020/kaiseki-2020.pdf> (2014年～).