

複素関数・同演習 第4回

～ n 乗根～

かつらだ まさし
桂田 祐史

2020年9月30日

1 本日の内容・連絡事項

2 複素数の定義と基本的な性質

● n 乗根

- 定義と極形式表示
- ± 1 の n 乗根
- よくあるよくない解答
- 余談 1: 定木とコンパスによる正 n 角形の作図 (円周の等分)
- 余談 2: $\sin 1^\circ$, $\cos 1^\circ$ を求めて
- 遊び (脱線) の時間: Mathematica で $z^n = c$ を解く

3 参考文献

連絡事項

- 宿題 1, 問題に誤植があって、かなりの迷惑になってしまって、とても申し訳なく思います。しかし $z_2 = 1 - 2i$ でなくて $z_2 = 1 - 2ii = 3$ だと、 z_2 は実数になってしまって、簡単になり過ぎて、**複素数の計算が正しくできるかのチェックにならない**ので、 $z_2 = 1 - 2i$ で計算してみてください。

ちなみに類題を期末試験に出すと、得点率は 60% 台です。意外に低い。最初はサービス問題のつもりだったのだけど。多くの人が間違える、ということです (間違えても気づきにくいからかな)。こういう問題を軽視しないで下さい。

- 現在までのアンケート回答を見る限り、オフィスアワーは昼休みにしても大丈夫のようです。他の科目でも同じことを尋ねていて、その結果も見て決めます。今週中に曜日時間を連絡します (シラバスの「授業補足」に書き、次回の授業で通知します)。

本日の講義内容

- 本日は、講義ノート [1] の 1.10 の内容「 n 乗根」を講義する。 n 乗根はあちこちに出て来るので、正確に処理できることが重要。

1.11 n 乗根 1.11.1 定義と極形式表示

平方根ほど簡単ではないけれど…一応存在は確かめられる。

定義 4.1 (n 乗根)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $c \in \mathbb{C}$ とするとき、

$$(1) \quad z^n = c$$

を満たす z を c の n 乗根 (an n -th root of c) と呼ぶ。

$n = 2$ のとき**平方根** (square root)、 $n = 3$ のとき**立方根** (cube root) と呼ぶ。

$c = 0$ のとき、 c の n 乗根は 0 のみである。

一応注意しておく 複素数の平方根は、必ず実数の $\sqrt{\quad}$ で表せた。しかし複素数の n 乗根は、 n が 2 の冪であるときは例外として、それが出来ることは期待できない (この問題には深入りしない)。

その他 べきこん **冪根**, るいじょうこん **累乗根** という言葉もあるが、ここでは使わない (n を指定しないとあまり意味が無いので)。

1.11.1 定義と極形式表示

極形式を用いると n 乗根は容易に求まる。次の定理はマスターすること。

定理 4.2 (複素数の n 乗根)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$ とする。

$$(2) \quad c = \rho e^{i\phi} \quad (\rho > 0, \phi \in \mathbb{R})$$

とおくとき、 c の相異なる n 乗根は n 個存在し、それらは

$$(3) \quad \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

である。これらは複素平面上で、原点中心、半径 $\sqrt[n]{\rho}$ の円周の n 等分点である。

(求め方を示すだけでなく、存在することを証明してあるのが重要。)

この定理は、公式を暗記するだけでなく、自力で導出できるようにしておくのが望ましい。

1.11.1 定義と極形式表示

証明 $z = re^{i\theta}$ ($r > 0, \theta \in \mathbb{R}$) とおくと

$$z^n = c \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\phi} \Leftrightarrow (r^n = \rho \wedge e^{in\theta} = e^{i\phi}).$$

(注 $r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\phi}$ の両辺の絶対値を取って $r^n = \rho$ を得るのが \Rightarrow のポイント。) $r^n = \rho \Leftrightarrow r = \sqrt[n]{\rho}$ はすぐ分かる。もう一方から

$$\begin{aligned} e^{in\theta} = e^{i\phi} &\Leftrightarrow n\theta \equiv \phi \pmod{2\pi} \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad n\theta - \phi = k \cdot 2\pi \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) \quad \theta = \frac{\phi}{n} + k \frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} z^n = c &\Leftrightarrow \left(r = \sqrt[n]{\rho} \wedge (\exists k \in \mathbb{Z}) \theta = \frac{\phi}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) z = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\phi}{n} + k \frac{2\pi}{n}\right)}. \end{aligned}$$

(一見無限個の解があるように思うかもしれないが) k が n 増えると元に戻る (周期 n) ので、 $k = 0, 1, \dots, n-1$ だけで重複なく、漏れもない。 □

1.11.1 定義と極形式表示

系 4.3 (1 の n 乗根)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ とする。1 の n 乗根は

$$e^{ik\frac{2\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

の n 個である。これらは、 $\omega := e^{i\frac{2\pi}{n}}$ とおくと次のように表せる。

$$\omega^k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

これは単位円周の n 等分点である。

これから

$$z^n - 1 = (z - 1)(z - \omega) \cdots (z - \omega^{n-1}).$$

また定理 4.2 の z は次のように表せる。

$$z = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\phi}{n}} \omega^k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

また -1 の n 乗根は、 $e^{i\frac{\pi}{n}} \omega^k$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) と表せる。 ω は便利である。

1.11.2 ± 1 の n 乗根 (1)

良い計算練習になるので、 n が小さいとき、 1 と -1 の n 乗根を求めてみよう。
 $z^n = 1$ と $z^n = -1$ を解く、ということでもある。(以下で説明するが、後で自分でやってみることを勧める)

$1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ だから、 $z^n = 1$ の解は $z = \sqrt[n]{1} e^{i(\frac{0}{n} + k \frac{2\pi}{n})} = e^{i \frac{k2\pi}{n}}$ ($k = 0, \dots, n-1$)。

$-1 = 1 \cdot e^{i\pi}$ だから、 $z^n = -1$ の解は $z = \sqrt[n]{1} e^{i(\frac{\pi}{n} + k \frac{2\pi}{n})} = e^{i \frac{(2k+1)\pi}{n}}$ ($k = 0, \dots, n-1$)。

実数の根号 $\sqrt[n]{\quad}$ で表せるときはそうして見よう。

(1) $n = 2$ のとき。

$z^2 = 1$ の解は $e^{i \cdot k \frac{2\pi}{2}} = e^{ik\pi}$ ($k = 0, 1$) であるから $e^0 = 1$, $e^{i\pi} = -1$ 。

これは

$$z^2 - 1 = (z + 1)(z - 1)$$

と因数分解できることから分かる。

$z^2 = -1$ の解は $e^{i(\frac{\pi}{2} + k \frac{2\pi}{2})} = e^{i \frac{(2k+1)\pi}{2}}$ ($k = 0, 1$) であるから、 $e^{i \frac{\pi}{2}} = i$,
 $e^{i \frac{3\pi}{2}} = -i$ 。

これは

$$z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$$

と因数分解できることから分かる。

1.11.2 ± 1 の n 乗根 (2)

② $n = 3$ のとき。

$z^3 = 1$ の解は $z = e^{i \cdot k \frac{2\pi}{3}}$ ($k = 0, 1, 2$) であるから、 $e^0 = 1$, $e^{i \frac{2\pi}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$,
 $e^{i \frac{4\pi}{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

一方、

$$z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$$

という因数分解で、右辺の第2因数の根は(2次方程式の解として) $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ と求まるから)

$$z^3 - 1 = (z - 1) \left(z - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \left(z - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right).$$

$z^3 = -1$ の解は $z = e^{i(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{3}}$ ($k = 0, 1, 2$) であるから、
 $e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $e^{i\frac{3\pi}{3}} = -1$, $e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

また因数分解も上と同様に

$$z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1) = (z + 1) \left(z - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \left(z - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right).$$

1.11.2 ± 1 の n 乗根 (3)

- $n = 4$ のとき。

$z^4 = 1$ の解は $z = e^{ik\frac{2\pi}{4}} = e^{ik\frac{\pi}{2}}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) であるから、 $e^0 = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{3\pi}{4}} = -i$. 因数分解からも分かる。実際

$$z^4 - 1 = (z^2 + 1)(z^2 - 1) = (z + i)(z - i)(z + 1)(z - 1).$$

$z^4 = -1$ の解は $z = e^{i(\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{4})} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{4}}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) であるから、

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

一方、

$$z^4 + 1 = (z^2 + i)(z^2 - i).$$

と因数分解して、 $z^2 = -i$, $z^2 = i$ を解けなくもないが (平方根の計算は出来るはず)、そうするよりも

$$\begin{aligned} z^4 + 1 &= z^4 + 2z^2 + 1 - 2z^2 = (z^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}z)^2 \\ &= (z^2 + \sqrt{2}z + 1)(z^2 - \sqrt{2}z + 1) \end{aligned}$$

と因数分解すれば、2つの2次方程式の根として簡単に求まる。

$$z = \frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}.$$

1.11.2 ± 1 の n 乗根 (4)

(3) $n = 5$ のとき。

$z^5 = 1$ の解は $z = e^{ik\frac{2\pi}{5}}$ ($k = 0, 1, \dots, 4$) であるから、 $e^0 = 1$, $e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $e^{i\frac{4\pi}{5}}$, $e^{i\frac{6\pi}{5}}$, $e^{i\frac{8\pi}{5}}$. これらは $\sqrt{\quad}$ を使って表現可能である。(以下の計算に注目)

$$z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

であるが、

$$\begin{aligned} z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 &\Leftrightarrow z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = 0. \end{aligned}$$

$X = z + \frac{1}{z}$ とおくと、 $X^2 + X - 1 = 0$ で、この解は $X = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad z + \frac{1}{z} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow 2z^2 + (1 - \sqrt{5})z + 2 = 0 \quad \vee \quad 2z^2 + (1 + \sqrt{5})z + 2 = 0. \end{aligned}$$

ゆえに

$$z = 1, \frac{-(1 - \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-(1 + \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

1.11.2 ± 1 の n 乗根 (5)

一方、 $z^5 = -1$ の解は $z = e^{i(\frac{\pi}{5} + k\frac{2\pi}{5})} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{5}}$ ($k = 0, 1, \dots, 4$) であるから、 $e^{i\frac{\pi}{5}}$, $e^{i\frac{3\pi}{5}}$, $e^{i\frac{5\pi}{5}} = -1$, $e^{i\frac{7\pi}{5}}$, $e^{i\frac{9\pi}{5}}$. これらは $\sqrt{\quad}$ を使って表現可能である。

$$z^5 + 1 = (z + 1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1)$$

であるが、

$$\begin{aligned} z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0 &\Leftrightarrow z^2 - z + 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0. \end{aligned}$$

$X = z + \frac{1}{z}$ とおくと、 $X^2 - X - 1 = 0$ で、この解は $X = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad z + \frac{1}{z} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow 2z^2 - (1 + \sqrt{5})z + 2 = 0 \quad \vee \quad 2z^2 - (1 - \sqrt{5})z + 2 = 0. \end{aligned}$$

ゆえに

$$z = -1, \frac{(1 + \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \frac{(1 - \sqrt{5}) \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

($n = 5$ を振り返り: 代数的に解くことで $\frac{\pi}{5}$ の \cos , \sin が求まるのは注目に値する。)

1.11.2 ± 1 の n 乗根 (6)

- $n = 6$ のとき。これは宿題にすることがあるので、ここには書かない。
- $n = 7$ のとき。

$z^7 = 1$ の解は $e^{ik\frac{2\pi}{7}}$ ($k = 0, 1, \dots, 6$) であるから、 $e^0 = 1, e^{i\frac{2\pi}{7}}, e^{i\frac{4\pi}{7}}, e^{i\frac{6\pi}{7}}, e^{i\frac{8\pi}{7}}, e^{i\frac{10\pi}{7}}, e^{i\frac{12\pi}{7}}$ 。

$z^7 = -1$ の解は $e^{i(\frac{\pi}{7} + k\frac{2\pi}{7})} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{7}}$ ($k = 0, 1, \dots, 6$) であるから、 $e^{i\frac{\pi}{7}}, e^{i\frac{3\pi}{7}}, e^{i\frac{5\pi}{7}}, e^{i\frac{7\pi}{7}} = -1, e^{i\frac{9\pi}{7}}, e^{i\frac{11\pi}{7}}, e^{i\frac{13\pi}{7}}$ 。

これらは (1, -1 を除いて)、 $\sqrt{\quad}$ を使うことで表せないことが知られている (そういう問題を一般的に解決したのは Gauss である)。

- $n = 8$ のとき。これも宿題にすることがあるので、ここには書かない。 \square

1.11.3 よくあるよくない解答

この講義では、 n 乗根を求めなさい、という問題について、特に指定をしない限り、定理 4.2 の公式に当てはめて求めれば OK、とする。(2 次方程式の問題で、解の公式に代入して解を求めれば良い、というのに似ている。場合によっては、解の公式を導出させる問題があるかもしれないが、一方で公式を正確に使えることも重要である。)

ところが次のような答案を書いて悩ませてくれる人が少なくない。例えば「 $z^5 = 1$ の解を求めよ」という問に対して

$$z^5 = 1 = 1e^{i \cdot 0} = e^{2k\pi i} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

であるから

$$z = e^{\frac{2k\pi i}{5}} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

ゆえに

$$z = e^{\frac{2k\pi i}{5}} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

これは結果は正しいけれど、論理が破綻しているので(「行間を埋められますか?」と尋ねたくなる)非常に抵抗を感じて、減点したくなって来る。

余談 1: 定木とコンパスによる正 n 角形の作図 (円周の等分)

以上の話は、**定木とコンパスによる正 n 角形の作図**と関係がある。Gauss (1777-1855) は、定木とコンパスで正 n 角形が作図できるためには、 n が

$$n = 2^k \times \text{相異なるフェルマー素数 } F_m \text{ の積}$$

の形をしていることが必要十分であることを証明し (1801 年発表)、 $n = 17 = F_2$ のときの作図法を示した (発見は 1796 年)。つまり正 17 角形は作図可能である¹。これは有名な話で多くの本に載っているが、参考文献として、高木 [2], 栗原 [3] をあげておく。

フェルマー素数とは、**フェルマー数** $F_m := 2^{2^m} + 1$ のうち、素数であるもののことである。 $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65537$ はフェルマー素数であるが、 F_5 は素数でない ($F_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$ と素因数分解出来ることを Euler (1707-1783) が発見した)。

定木とコンパスで作図可能となる n は、小さい順に $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, \dots$ □

¹ $\cos \frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16} \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}} \right) =$
0.932472229404355...

余談2: $\sin 1^\circ$, $\cos 1^\circ$ を求めて

高校で、 30° , 45° , 60° の \sin , \cos の値を学んだ。正五角形の作図も良く出て来る問題で、 36° , 72° の \sin , \cos の値も求めたことがあるかもしれない(大学入試のネタになります)。これらは $\sqrt{\quad}$ を使って表せる。

半角の公式を使うと、 18° , 15° の \sin , \cos も $\sqrt{\quad}$ で表せる。加法定理を使うと、 $18^\circ - 15^\circ = 3^\circ$ の \sin , \cos も $\sqrt{\quad}$ で表せることが分かる。

それでは 1° の \sin , \cos はどうだろう?もしこれが $\sqrt{\quad}$ で表されれば、任意の自然数 n に対して n° の \sin , \cos が $\sqrt{\quad}$ で表される。

この問題は、「[角の三等分](#)」とも関係があり、結論を天下りに述べると、 1° の \sin , \cos を $\sqrt{\quad}$ で表すことは出来ないことが知られている。

アル・カーシー (ジャムシード・ギヤースッディーン・アル・カーシー, 1380-1429, ペルシャの数学者・[天文学者](#)) は、3次方程式 $\sin 3^\circ = 3x - 4x^3$ を数値的に解くことによって ($\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ に注意)、 $\sin 1^\circ$ を求めた (カツツ [4])。

遊び (脱線) の時間: Mathematica で $z^n = c$ を解く

Mathematica で 3 乗根を求めてみよう。 $z^3 = i$ を解くには

```
ComplexExpand[Solve[z^3==I,z]]
```

あるいは $((x + yi)^3 = i$ を解くことにして)

```
Solve[{x^3-3x y^2==0,3x^2 y-y^3==1},{x,y},Reals]
```

この解は実数の $\sqrt[3]{}$ で表せる ($z = -i, \frac{\pm\sqrt{3} + i}{2}$)。

ところが $z^3 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ はうまく行かない。(この辺は角の三等分とも関係する。 30° の三等分は、実数の $\sqrt[3]{}$, $\sqrt{}$ では表せない。三角関数を使って答えを表す。)

一方、これを書いているときに気づいたのだけど、今の Mathematica は、 $z^{17} = 1$ を $\sqrt{}$ で解けるようになっている (Mathematica 12 で確認)。

```
ComplexExpand[Solve[z^17==1,z]]
```

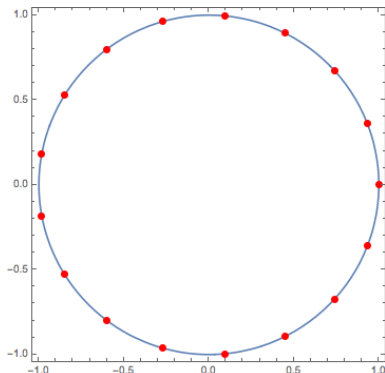
```
ToRadicals[%]
```

(そのうち Mathematica が $z^{257} = 1$ を解けるようになるだろうか?)

遊び (脱線) の時間: Mathematica で $z^n = c$ を解く

前のスライドの最後の結果はごちゃごちゃしているけれど、本当に 17 等分点だろうか？

```
g0 = ContourPlot[x^2 + y^2 == 1, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
plotpoints[l_]:=Show[g0,ListPlot[l,PlotStyle->Directive[Red,PointSize[Large]]]]
points17={Re[z],Im[z]}/.ToRadicals[ComplexExpand[Solve[z^17==1,z]]]
regular17gon=plotpoints[points17]
```



参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート，現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. <http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/complex2020.pdf> (2014～).
- [2] 高木貞治：近世数学史談及雑談，共立出版 (1946)，1996年に「近世数学史談・数学雑談復刻版」として復刻されている。また1995年に岩波文庫に「近世数学史談」が入った。
- [3] 栗原将人：ガウスの数論世界をゆく：正多角形の作図から相互法則・数論幾何へ，数学書房 (2017/5/15)。
- [4] ヴィクター J. カッツ：カッツ 数学の歴史，共立出版 (2005)，上野 健 璽・三浦伸夫監訳，中根美千代・高橋秀裕・林知宏・大谷卓史・佐藤賢一・東慎一郎・中澤聡翻訳。原著は、Victor J. Katz, A History of Mathematics, A: An Introduction, Second Edition, Addison Wesley Longman (1998)。