複素関数・同演習 第4回

～n 乗根～

桂田 祐史 (かつらだ まさし)

2020 年 9 月 30 日

目次

本日の内容・連絡事項

連絡事項

- 宿題 1, 問題に誤植があって、かなりの迷惑になってしまって、とても申し訳なく思います。しかし $z_2 = 1 - 2i$ でなくて $z_2 = 1 - 2ii = 3$ だと、z_2 は実数になってしまって、簡単になり過ぎて、複素数の計算が正しくできるかのチェックにならないので、$z_2 = 1 - 2i$ で計算してみて下さい。

  ちなみに類題を期末試験に出すと、得点率は 60%台です。意外に低い。最初はサービス問題のつもりだったのだけど。多くの人が間違える、ということです (間違えても気付きにくいからかな)。こういう問題を軽視しないで下さい。
- 現在までのアンケート回答を見る限り、オフィスアワーは昼休みにしても大丈夫のようです。他の科目でも同じことを尋ねていて、その結果も見て決めます。今週中に曜日時間を連絡します (シラバスの「授業補足」に書き、次回の授業で通知します)。

本日の講義内容

- 本日は、講義ノート [1] の 1.10 の内容「n 乗根」を講義する。n 乗根はあちこちに出て来るので、正確に処理できることが重要。

1.11 n 乗根　1.11.1 定義と極形式表示

平方根ほど簡単ではないけれど…一応存在は確かめられる。

平方根ほど簡単ではないけれど…一応存在は確かめられる。

定義 4.1 (n 乗根)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $c \in \mathbb{C}$ とするとき、

$$z^n = c \tag{1}$$

を満たす z を c の n **乗根** (an n-th root of c) と呼ぶ。

平方根ほど簡単ではないけれど…一応存在は確かめられる。

定義 4.1 (n 乗根)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $c \in \mathbb{C}$ とするとき、

$$z^n = c \tag{1}$$

を満たす z を c の n **乗根** (an n-th root of c) と呼ぶ。

$n = 2$ のとき**平方根** (square root)、$n = 3$ のとき**立方根** (cube root) と呼ぶ。

平方根ほど簡単ではないけれど…一応存在は確かめられる。

定義 4.1 (n 乗根)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $c \in \mathbb{C}$ とするとき、

$$z^n = c \tag{1}$$

を満たす z を c の n **乗根** (an n-th root of c) と呼ぶ。

$n = 2$ のとき**平方根** (square root)、$n = 3$ のとき**立方根** (cube root) と呼ぶ。

$c = 0$ のとき、c の n 乗根は 0 のみである。

1.11 n 乗根　1.11.1 定義と極形式表示

平方根ほど簡単ではないけれど…一応存在は確かめられる。

定義 4.1 (n 乗根)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $c \in \mathbb{C}$ とするとき、

$$z^n = c \tag{1}$$

を満たす z を c の n **乗根** (an n-th root of c) と呼ぶ。

$n = 2$ のとき**平方根** (square root)、$n = 3$ のとき**立方根** (cube root) と呼ぶ。

$c = 0$ のとき、c の n 乗根は 0 のみである。

一応注意しておく　複素数の平方根は、必ず実数の $\sqrt{\ }$ で表せた。しかし複素数の n 乗根は、n が 2 の冪であるときは例外として、それが出来ることは期待できない (この問題には深入りしない)。

平方根ほど簡単ではないけれど…一応存在は確かめられる。

定義 4.1 (n 乗根)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $c \in \mathbb{C}$ とするとき、

$$z^n = c \tag{1}$$

を満たす z を c の n **乗根** (an n-th root of c) と呼ぶ。

$n = 2$ のとき**平方根** (square root)、$n = 3$ のとき**立方根** (cube root) と呼ぶ。

$c = 0$ のとき、c の n 乗根は 0 のみである。

一応注意しておく　複素数の平方根は、必ず実数の $\sqrt{\ }$ で表せた。しかし複素数の n 乗根は、n が 2 の冪であるときは例外として、それが出来ることは期待できない (この問題には深入りしない)。

その他　**冪根**(べきこん), **累乗根**(るいじょうこん) という言葉もあるが、ここでは使わない (n を指定しないとあまり意味が無いので)。

1.11.1 定義と極形式表示

極形式を用いると n 乗根は容易に求まる。次の定理はマスターすること。

定理 4.2 (複素数の n 乗根)

$n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $c\in\mathbb{C}$, $c\neq 0$ とする。

$$c=\rho e^{i\phi}\quad(\rho>0,\ \phi\in\mathbb{R}) \tag{2}$$

とおくとき、c の相異なる n 乗根は n 個存在し、それらは

$$\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\left(\frac{\phi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)}\quad(k=0,1,\cdots,n-1) \tag{3}$$

である。これらは複素平面上で、原点中心、半径 $\sqrt[n]{\rho}$ の円周の n 等分点である。

1.11.1 定義と極形式表示

極形式を用いると n 乗根は容易に求まる。次の定理はマスターすること。

定理 4.2 (複素数の n 乗根)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$ とする。

$$c = \rho e^{i\phi} \quad (\rho > 0,\ \phi \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

とおくとき、c の相異なる n 乗根は n 個存在し、それらは

$$\sqrt[n]{\rho}\, e^{i\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n} k\right)} \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1) \tag{3}$$

である。これらは複素平面上で、原点中心、半径 $\sqrt[n]{\rho}$ の円周の n 等分点である。

(求め方を示すだけでなく、存在することを証明してあるのが重要。)

この定理は、公式を暗記するだけでなく、自力で導出できるようにしておくのが望ましい。

1.11.1 定義と極形式表示

証明　$z = re^{i\theta}$ $(r > 0,\ \theta \in \mathbb{R})$ とおくと

$$z^n = c \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\phi} \Leftrightarrow \left(r^n = \rho \wedge e^{in\theta} = e^{i\phi}\right).$$

(注　$r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\phi}$ の両辺の絶対値を取って $r^n = \rho$ を得るのが $\Rightarrow$ のポイント。)

証明　$z=re^{i\theta}$ $(r>0,\ \theta\in\mathbb{R})$ とおくと

$$z^n=c\Leftrightarrow r^ne^{in\theta}=\rho e^{i\phi}\Leftrightarrow\left(r^n=\rho\wedge e^{in\theta}=e^{i\phi}\right).$$

(注　$r^ne^{in\theta}=\rho e^{i\phi}$ の両辺の絶対値を取って $r^n=\rho$ を得るのが $\Rightarrow$ のポイント。)
$r^n=\rho\Leftrightarrow r=\sqrt[n]{\rho}$ はすぐ分かる。もう一方から

$$\begin{aligned}e^{in\theta}=e^{i\phi}&\Leftrightarrow n\theta\equiv\phi \pmod{2\pi}\\&\Leftrightarrow(\exists k\in\mathbb{Z})\quad n\theta-\phi=k\cdot 2\pi\\&\Leftrightarrow(\exists k\in\mathbb{Z})\quad \theta=\frac{\phi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}z^n=c&\Leftrightarrow\left(r=\sqrt[n]{\rho}\wedge(\exists k\in\mathbb{Z})\ \theta=\frac{\phi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)\\&\Leftrightarrow(\exists k\in\mathbb{Z})\ z=\sqrt[n]{\rho}e^{i\left(\frac{\phi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)}.\end{aligned}$$

(一見無限個の解があるように思うかもしれないが) k が n 増えると元に戻る (周期 n) ので、$k=0,1,\cdots,n-1$ だけで重複なく、漏れもない。

系 4.3 (1 の n 乗根)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ とする。1 の n 乗根は

$$e^{ik\frac{2\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

の n 個である。これらは、$\omega := e^{i\frac{2\pi}{n}}$ とおくと次のように表せる。

$$\omega^k \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1).$$

これは単位円周の n 等分点である。

系 4.3 (1 の n 乗根)

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ とする。1 の n 乗根は

$$e^{ik\frac{2\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

の n 個である。これらは、$\omega := e^{i\frac{2\pi}{n}}$ とおくと次のように表せる。

$$\omega^k \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1).$$

これは単位円周の n 等分点である。

これから

$$z^n - 1 = (z-1)(z-\omega)\cdots(z-\omega^{n-1}).$$

また定理 4.2 の z は次のように表せる。

$$z = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\phi}{n}} \omega^k \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1).$$

また -1 の n 乗根は、$e^{i\frac{\pi}{n}}\omega^k$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ と表せる。ω は便利である。

1.11.2 ±1 の n 乗根 (1)

良い計算練習になるので、n が小さいとき、1 と −1 の n 乗根を求めてみよう。$z^n=1$ と $z^n=-1$ を解く、ということでもある。(以下で説明するが、後で自分でやってみることを勧める)

$1=1\cdot e^{i\cdot 0}$ だから、$z^n=1$ の解は $z=\sqrt[n]{1}e^{i\left(\frac{0}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)}=e^{i\frac{k2\pi}{n}}$ $(k=0,\cdots,n-1)$.

$-1=1\cdot e^{i\pi}$ だから、$z^n=-1$ の解は $z=\sqrt[n]{1}e^{i\left(\frac{\pi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)}=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}$ $(k=0,\cdots,n-1)$.

実数の根号 $\sqrt[n]{\quad}$ で表せるときはそうして見よう。

1.11.2 ± 1 の n 乗根 (1)

良い計算練習になるので、n が小さいとき、1 と -1 の n 乗根を求めてみよう。$z^n=1$ と $z^n=-1$ を解く、ということでもある。(以下で説明するが、後で自分でやってみることを勧める)

$1=1\cdot e^{i\cdot 0}$ だから、$z^n=1$ の解は $z=\sqrt[n]{1}e^{i\left(\frac{0}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)}=e^{i\frac{k2\pi}{n}}$ $(k=0,\cdots,n-1)$.

$-1=1\cdot e^{i\pi}$ だから、$z^n=-1$ の解は $z=\sqrt[n]{1}e^{i\left(\frac{\pi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)}=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}$ $(k=0,\cdots,n-1)$.

実数の根号 $\sqrt[n]{}$ で表せるときはそうして見よう。

(1) $n=2$ のとき。

$z^2=1$ の解は $e^{i\cdot k\frac{2\pi}{2}}=e^{ik\pi}$ $(k=0,1)$ であるから $e^0=1$, $e^{i\pi}=-1$.

1.11.2 ±1 の n 乗根 (1)

良い計算練習になるので、n が小さいとき、1 と -1 の n 乗根を求めてみよう。$z^n=1$ と $z^n=-1$ を解く、ということでもある。(以下で説明するが、後で自分でやってみることを勧める)

$1=1\cdot e^{i\cdot 0}$ だから、$z^n=1$ の解は $z=\sqrt[n]{1}e^{i\left(\frac{0}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)}=e^{i\frac{k2\pi}{n}}$ $(k=0,\cdots,n-1)$.

$-1=1\cdot e^{i\pi}$ だから、$z^n=-1$ の解は $z=\sqrt[n]{1}e^{i\left(\frac{\pi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)}=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}$ $(k=0,\cdots,n-1)$.

実数の根号 $\sqrt[n]{\quad}$ で表せるときはそうして見よう。

(1) $n=2$ のとき。

$z^2=1$ の解は $e^{i\cdot k\frac{2\pi}{2}}=e^{ik\pi}$ $(k=0,1)$ であるから $e^0=1$, $e^{i\pi}=-1$.

これは

$$z^2-1=(z+1)(z-1)$$

と因数分解できることからも分かる。

1.11.2 ±1 の n 乗根 (1)

良い計算練習になるので、n が小さいとき、1 と -1 の n 乗根を求めてみよう。$z^n=1$ と $z^n=-1$ を解く、ということでもある。(以下で説明するが、後で自分でやってみることを勧める)

$1=1\cdot e^{i\cdot 0}$ だから、$z^n=1$ の解は $z=\sqrt[n]{1}e^{i\left(\frac{0}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)}=e^{i\frac{k2\pi}{n}}$ $(k=0,\cdots,n-1)$.

$-1=1\cdot e^{i\pi}$ だから、$z^n=-1$ の解は $z=\sqrt[n]{1}e^{i\left(\frac{\pi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)}=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}$ $(k=0,\cdots,n-1)$.

実数の根号 $\sqrt[n]{\quad}$ で表せるときはそうして見よう。

(1) $n=2$ のとき。

$z^2=1$ の解は $e^{i\cdot k\frac{2\pi}{2}}=e^{ik\pi}$ $(k=0,1)$ であるから $e^0=1$, $e^{i\pi}=-1$.

これは

$$z^2-1=(z+1)(z-1)$$

と因数分解できることからも分かる。

$z^2=-1$ の解は $e^{i\left(\frac{\pi}{2}+k\frac{2\pi}{2}\right)}=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2}}$ $(k=0,1)$ であるから、$e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, $e^{i\frac{3\pi}{2}}=-i$.

1.11.2 ± 1 の n 乗根 (1)

良い計算練習になるので、n が小さいとき、1 と -1 の n 乗根を求めてみよう。$z^n = 1$ と $z^n = -1$ を解く、ということでもある。(以下で説明するが、後で自分でやってみることを勧める)

$1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$ だから、$z^n = 1$ の解は $z = \sqrt[n]{1} e^{i\left(\frac{0}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} = e^{i\frac{k2\pi}{n}}$ $(k = 0, \cdots, n-1)$.

$-1 = 1 \cdot e^{i\pi}$ だから、$z^n = -1$ の解は $z = \sqrt[n]{1} e^{i\left(\frac{\pi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}$ $(k = 0, \cdots, n-1)$.

実数の根号 $\sqrt[n]{\quad}$ で表せるときはそうして見よう。

(1) $n = 2$ のとき。

$z^2 = 1$ の解は $e^{i \cdot k\frac{2\pi}{2}} = e^{ik\pi}$ $(k = 0, 1)$ であるから $e^0 = 1$, $e^{i\pi} = -1$.
これは

$$z^2 - 1 = (z+1)(z-1)$$

と因数分解できることからも分かる。

$z^2 = -1$ の解は $e^{i\left(\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2}}$ $(k = 0, 1)$ であるから、$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$.
これは

$$z^2 + 1 = (z+i)(z-i)$$

と因数分解できることからも分かる。

1.11.2 ±1 の n 乗根 (2)

2. $n = 3$ のとき。
$z^3 = 1$ の解は $z = e^{i\cdot k\frac{2\pi}{3}}$ $(k = 0, 1, 2)$ であるから、$e^0 = 1$, $e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

1.11.2 ± 1 の n 乗根 (2)

2. $n = 3$ のとき。
$z^3 = 1$ の解は $z = e^{i \cdot k \frac{2\pi}{3}}$ $(k = 0, 1, 2)$ であるから、$e^0 = 1$, $e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.
一方、
$$z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$$
という因数分解で、右辺の第 2 因数の根は (2 次方程式の解として) $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ と求まるから)
$$z^3 - 1 = (z-1)\left(z - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

1.11.2 ± 1 の n 乗根 (2)

2. $n=3$ のとき。
$z^3 = 1$ の解は $z = e^{i\cdot k\frac{2\pi}{3}}$ $(k=0,1,2)$ であるから、$e^0 = 1$, $e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.
一方、
$$z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$$
という因数分解で、右辺の第 2 因数の根は (2 次方程式の解として) $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ と求まるから)
$$z^3 - 1 = (z-1)\left(z - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$
$z^3 = -1$ の解は $z = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{3}}$ $(k=0,1,2)$ であるから、
$e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $e^{i\frac{3\pi}{3}} = -1$, $e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

1.11.2 ± 1 の n 乗根 (2)

2. $n=3$ のとき。
$z^3=1$ の解は $z=e^{i\cdot k\frac{2\pi}{3}}$ $(k=0,1,2)$ であるから、$e^0=1$, $e^{i\frac{2\pi}{3}}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $e^{i\frac{4\pi}{3}}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.
一方、
$$z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$$
という因数分解で、右辺の第 2 因数の根は (2 次方程式の解として) $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ と求まるから)
$$z^3-1=(z-1)\left(z-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$
$z^3=-1$ の解は $z=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}\right)}=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{3}}$ $(k=0,1,2)$ であるから、
$e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $e^{i\frac{3\pi}{3}}=-1$, $e^{i\frac{5\pi}{3}}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.
また因数分解も上と同様に
$$z^3+1=(z+1)(z^2-z+1)=(z+1)\left(z-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

1.11.2 ±1 の n 乗根 (3)

- $n = 4$ のとき。
  $z^4 = 1$ の解は $z = e^{ik\frac{2\pi}{4}} = e^{ik\frac{\pi}{2}}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ であるから、$e^0 = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{3\pi}{4}} = -i$.

1.11.2 ± 1 の n 乗根 (3)

- $n = 4$ のとき。
  $z^4 = 1$ の解は $z = e^{ik\frac{2\pi}{4}} = e^{ik\frac{\pi}{2}}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ であるから、$e^0 = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{3\pi}{4}} = -i$. 因数分解からも分かる。実際
  $$z^4 - 1 = (z^2 + 1)(z^2 - 1) = (z + i)(z - i)(z + 1)(z - 1).$$

1.11.2 ±1 の n 乗根 (3)

- $n = 4$ のとき。
  $z^4 = 1$ の解は $z = e^{ik\frac{2\pi}{4}} = e^{ik\frac{\pi}{2}}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ であるから、$e^0 = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{3\pi}{4}} = -i$. 因数分解からも分かる。実際
  $$z^4 - 1 = (z^2 + 1)(z^2 - 1) = (z + i)(z - i)(z + 1)(z - 1).$$
  $z^4 = -1$ の解は $z = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{4}}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ であるから、
  $$e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{-1 + i}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{-1 - i}{\sqrt{2}}, \quad e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{1 - i}{\sqrt{2}}.$$

1.11.2 ±1 の n 乗根 (3)

- $n=4$ のとき。
  $z^4=1$ の解は $z=e^{ik\frac{2\pi}{4}}=e^{ik\frac{\pi}{2}}$ $(k=0,1,2,3)$ であるから、$e^0=1$, $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, $e^{i\pi}=-1$, $e^{i\frac{3\pi}{4}}=-i$. 因数分解からも分かる。実際
  $$z^4-1=(z^2+1)(z^2-1)=(z+i)(z-i)(z+1)(z-1).$$
  $z^4=-1$ の解は $z=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{4}}$ $(k=0,1,2,3)$ であるから、
  $$e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{1+i}{\sqrt{2}},\quad e^{i\frac{3\pi}{4}}=\frac{-1+i}{\sqrt{2}},\quad e^{i\frac{5\pi}{4}}=\frac{-1-i}{\sqrt{2}},\quad e^{i\frac{7\pi}{4}}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$
  一方、
  $$z^4+1=(z^2+i)(z^2-i).$$
  と因数分解して、$z^2=-i$, $z^2=i$ を解けなくもないが (平方根の計算は出来るはず)、そうするよりも
  $$z^4+1=z^4+2z^2+1-2z^2=\left(z^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}z\right)^2$$
  $$=\left(z^2+\sqrt{2}z+1\right)\left(z^2-\sqrt{2}z+1\right)$$
  と因数分解すれば、2 つの 2 次方程式の根として簡単に求まる。
  $$z=\frac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}.$$

(3) $n=5$ のとき。

$z^5=1$ の解は $z=e^{ik\frac{2\pi}{5}}$ $(k=0,1,\cdots,4)$ であるから、$e^0=1$, $e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $e^{i\frac{4\pi}{5}}$, $e^{i\frac{6\pi}{5}}$, $e^{i\frac{8\pi}{5}}$. これらは $\sqrt{\ }$ を使って表現可能である。(以下の計算に注目)

$$z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$$

であるが、

$$\begin{aligned} z^4+z^3+z^2+z+1=0 &\Leftrightarrow z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0 \\ &\Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{z}\right)^2+z+\frac{1}{z}-1=0. \end{aligned}$$

$X=z+\frac{1}{z}$ とおくと、$X^2+X-1=0$ で、この解は $X=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

$$\begin{aligned} & z+\frac{1}{z}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad z+\frac{1}{z}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 2z^2+(1-\sqrt{5})z+2=0 \quad \vee \quad 2z^2+(1+\sqrt{5})z+2=0. \end{aligned}$$

ゆえに

$$z=1,\ \frac{-(1-\sqrt{5})\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\ \frac{-(1+\sqrt{5})\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

1.11.2 ±1 の n 乗根 (5)

一方、$z^5=-1$ の解は $z=e^{i\left(\frac{\pi}{5}+k\frac{2\pi}{5}\right)}=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{5}}$ $(k=0,1,\cdots,4)$ であるから、$e^{i\frac{\pi}{5}}$, $e^{i\frac{3\pi}{5}}$, $e^{i\frac{5\pi}{5}}=-1$, $e^{i\frac{7\pi}{5}}$, $e^{i\frac{9\pi}{5}}$. これらは $\sqrt{\quad}$ を使って表現可能である。

$$z^5+1=(z+1)(z^4-z^3+z^2-z+1)$$

であるが、

$$\begin{aligned} z^4-z^3+z^2-z+1=0 &\Leftrightarrow z^2-z+1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0 \\ &\Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=0. \end{aligned}$$

$X=z+\frac{1}{z}$ とおくと、$X^2-X-1=0$ で、この解は $X=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

$$\begin{aligned} & z+\frac{1}{z}=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad z+\frac{1}{z}=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 2z^2-(1+\sqrt{5})z+2=0 \quad \vee \quad 2z^2-(1-\sqrt{5})z+2=0. \end{aligned}$$

ゆえに

$$z=-1,\ \frac{(1+\sqrt{5})\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\ \frac{(1-\sqrt{5})\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

($n=5$ を振り返り: 代数的に解くことで $\frac{\pi}{5}$ の cos, sin が求まるのは注目に値する。)

1.11.2 ±1 の n 乗根 (6)

- $n=6$ のとき。これは宿題にすることがあるので、ここには書かない。
- $n=7$ のとき。
  $z^7=1$ の解は $e^{ik\frac{2\pi}{7}}$ $(k=0,1,\cdots,6)$ であるから、$e^0=1$, $e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $e^{i\frac{4\pi}{7}}$, $e^{i\frac{6\pi}{7}}$, $e^{i\frac{8\pi}{7}}$, $e^{i\frac{10\pi}{7}}$, $e^{i\frac{12\pi}{7}}$.
  $z^7=-1$ の解は $e^{i\left(\frac{\pi}{7}+k\frac{2\pi}{7}\right)}=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{7}}$ $(k=0,1,\cdots,6)$ であるから、$e^{i\frac{\pi}{7}}$, $e^{i\frac{3\pi}{7}}$, $e^{i\frac{5\pi}{7}}$, $e^{i\frac{7\pi}{7}}=-1$, $e^{i\frac{9\pi}{7}}$, $e^{i\frac{11\pi}{7}}$, $e^{i\frac{13\pi}{7}}$.
  これらは (1, -1 を除いて)、$\sqrt{\quad}$ を使うことで表せないことが知られている (そういう問題を一般的に解決したのは Gauss である)。
- $n=8$ のとき。これも宿題にすることがあるので、ここには書かない。 $\square$

1.11.3 よくあるよくない解答

この講義では、n 乗根を求めなさい、という問題について、特に指定をしない限り、定理 4.2 の公式に当てはめて求めれば OK、とする。(2 次方程式の問題で、解の公式に代入して解を求めれば良い、というのに似ている。場合によっては、解の公式を導出させる問題があるかもしれないが、一方で公式を正確に使えることも重要である。)

ところが次のような答案を書いて悩ませてくれる人が少なくない。例えば「$z^5 = 1$ の解を求めよ」という問に対して

$$z^5 = 1 = 1e^{i\cdot 0} = e^{2k\pi i} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

であるから

$$z = e^{\frac{2k\pi i}{5}} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

ゆえに

$$z = e^{\frac{2k\pi i}{5}} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

これは結果は正しいけれど、論理が破綻しているので (「行間を埋められますか？」と尋ねたくなる) 非常に抵抗を感じて、減点したくなって来る。

余談 1:定木とコンパスによる正 n 角形の作図 (円周の等分)

以上の話は、定木とコンパスによる正 n 角形の作図と関係がある。

---

[1] $\cos\dfrac{2\pi}{17} = \dfrac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right) =$ $0.932472229404355\cdots$.

余談 1:定木とコンパスによる正 n 角形の作図 (円周の等分)

以上の話は、定木とコンパスによる正 n 角形の作図と関係がある。Gauss (1777–1855) は、定木とコンパスで正 n 角形が作図できるためには、n が

$$n = 2^k \times \text{相異なるフェルマー素数 } F_m \text{ の積}$$

の形をしていることが必要十分であることを証明し (1801 年発表)、
$n = 17 = F_2$ のときの作図法を示した (発見は 1796 年)。

[1] $\cos\dfrac{2\pi}{17} = \dfrac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right) =$
$0.932472229404355\cdots$.

余談 1:定木とコンパスによる正 n 角形の作図 (円周の等分)

以上の話は、定木とコンパスによる正 n 角形の作図と関係がある。Gauss (1777–1855) は、定木とコンパスで正 n 角形が作図できるためには、n が

$$n = 2^k \times \text{相異なるフェルマー素数 } F_m \text{ の積}$$

の形をしていることが必要十分であることを証明し (1801 年発表)、$n = 17 = F_2$ のときの作図法を示した (発見は 1796 年)。つまり正 17 角形は作図可能である [1]。これは有名な話で多くの本に載っているが、参考文献として、高木 [2], 栗原 [3] をあげておく。

[1] $\cos\dfrac{2\pi}{17} = \dfrac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right) = 0.932472229404355\cdots$.

以上の話は、定木とコンパスによる正 n 角形の作図と関係がある。Gauss (1777–1855) は、定木とコンパスで正 n 角形が作図できるためには、n が

$$n = 2^k \times \text{相異なるフェルマー素数 } F_m \text{ の積}$$

の形をしていることが必要十分であることを証明し (1801 年発表)、$n = 17 = F_2$ のときの作図法を示した (発見は 1796 年)。つまり正 17 角形は作図可能である [1]。これは有名な話で多くの本に載っているが、参考文献として、高木 [2], 栗原 [3] をあげておく。

フェルマー素数とは、**フェルマー数** $F_m := 2^{2^m} + 1$ のうち、素数であるもののことである。$F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$ はフェルマー素数であるが、F_5 は素数でない ($F_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$ と素因数分解出来ることを Euler (1707–1783) が発見した)。

定木とコンパスで作図可能となる n は、小さい順に $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, \cdots$. □

[1] $\cos\dfrac{2\pi}{17} = \dfrac{1}{16}\left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}\right) = 0.932472229404355\cdots$.

余談 2: sin 1°, cos 1° を求めて

高校で、30°, 45°, 60° の sin, cos の値を学んだ。正五角形の作図も良く出て来る問題で、36°, 72° の sin, cos の値も求めたことがあるかもしれない (大学入試のネタになります)。これらは $\sqrt{\ \ }$ を使って表せる。

余談 2: $\sin 1^\circ$, $\cos 1^\circ$ を求めて

高校で、30°, 45°, 60° の sin, cos の値を学んだ。正五角形の作図も良く出て来る問題で、36°, 72° の sin, cos の値も求めたことがあるかもしれない (大学入試のネタになります)。これらは $\sqrt{\quad}$ を使って表せる。

半角の公式を使うと、18°, 15° の sin, cos も $\sqrt{\quad}$ で表せる。加法定理を使うと、$18^\circ - 15^\circ = 3^\circ$ の sin, cos も $\sqrt{\quad}$ で表せることが分かる。

余談 2: $\sin 1^\circ$, $\cos 1^\circ$ を求めて

高校で、$30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ の sin, cos の値を学んだ。正五角形の作図も良く出て来る問題で、$36^\circ, 72^\circ$ の sin, cos の値も求めたことがあるかもしれない (大学入試のネタになります)。これらは $\sqrt{\ \ }$ を使って表せる。

半角の公式を使うと、$18^\circ, 15^\circ$ の sin, cos も $\sqrt{\ \ }$ で表せる。加法定理を使うと、$18^\circ - 15^\circ = 3^\circ$ の sin, cos も $\sqrt{\ \ }$ で表せることが分かる。

それでは 1° の sin, cos はどうだろう？もしこれが $\sqrt{\ \ }$ で表されれば、任意の自然数 n に対して n° の sin, cos が $\sqrt{\ \ }$ で表される。

余談 2: $\sin 1^\circ$, $\cos 1^\circ$ を求めて

高校で、$30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ の sin, cos の値を学んだ。正五角形の作図も良く出て来る問題で、$36^\circ, 72^\circ$ の sin, cos の値も求めたことがあるかもしれない (大学入試のネタになります)。これらは $\sqrt{\quad}$ を使って表せる。

半角の公式を使うと、$18^\circ, 15^\circ$ の sin, cos も $\sqrt{\quad}$ で表せる。加法定理を使うと、$18^\circ - 15^\circ = 3^\circ$ の sin, cos も $\sqrt{\quad}$ で表せることが分かる。

それでは 1° の sin, cos はどうだろう？もしこれが $\sqrt{\quad}$ で表されれば、任意の自然数 n に対して n° の sin, cos が $\sqrt{\quad}$ で表される。

この問題は、「角の三等分」とも関係があり、結論を天下りに述べると、1° の sin, cos を $\sqrt{\quad}$ で表すことは出来ないことが知られている。

余談 2: $\sin 1^\circ$, $\cos 1^\circ$ を求めて

高校で、$30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ の sin, cos の値を学んだ。正五角形の作図も良く出て来る問題で、$36^\circ, 72^\circ$ の sin, cos の値も求めたことがあるかもしれない (大学入試のネタになります)。これらは $\sqrt{\quad}$ を使って表せる。

半角の公式を使うと、$18^\circ, 15^\circ$ の sin, cos も $\sqrt{\quad}$ で表せる。加法定理を使うと、$18^\circ - 15^\circ = 3^\circ$ の sin, cos も $\sqrt{\quad}$ で表せることが分かる。

それでは 1° の sin, cos はどうだろう？もしこれが $\sqrt{\quad}$ で表されれば、任意の自然数 n に対して n° の sin, cos が $\sqrt{\quad}$ で表される。

この問題は、「角の三等分」とも関係があり、結論を天下りに述べると、1° の sin, cos を $\sqrt{\quad}$ で表すことは出来ないことが知られている。

アル・カーシー (ジャムシード・ギヤースッディーン・アル・カーシー, 1380–1429, ペルシャの数学者・天文学者) は、3 次方程式
$\sin 3^\circ = 3x - 4x^3$ を数値的に解くことによって ($\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ に注意)、$\sin 1^\circ$ を求めた (カッツ [4])。

遊び (脱線) の時間: Mathematica で $z^n = c$ を解く

Mathematica で 3 乗根を求めてみよう。$z^3 = i$ を解くには

```
ComplexExpand[Solve[z^3==I,z]]
```

あるいは ($(x+yi)^3 = i$ を解くことにして)

```
Solve[{x^3-3x y^2==0,3x^2 y-y^3==1},{x,y},Reals]
```

この解は実数の $\sqrt[3]{\ }$ で表せる ($z = -i,\ \dfrac{\pm\sqrt{3}+i}{2}$)。

遊び (脱線) の時間: Mathematica で $z^n = c$ を解く

Mathematica で 3 乗根を求めてみよう。$z^3 = i$ を解くには

```
ComplexExpand[Solve[z^3==I,z]]
```

あるいは ($(x+yi)^3 = i$ を解くことにして)

```
Solve[{x^3-3x y^2==0,3x^2 y-y^3==1},{x,y},Reals]
```

この解は実数の $\sqrt[3]{\ }$ で表せる ($z = -i, \dfrac{\pm\sqrt{3}+i}{2}$)。
ところが $z^3 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ はうまく行かない。(この辺は角の三等分とも関係する。30° の三等分は、実数の $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt{\ }$ では表せない。三角関数を使って答えを表す。)

遊び (脱線) の時間: Mathematica で $z^n = c$ を解く

Mathematica で 3 乗根を求めてみよう。$z^3 = i$ を解くには

```
ComplexExpand[Solve[z^3==I,z]]
```

あるいは $((x+yi)^3 = i$ を解くことにして)

```
Solve[{x^3-3x y^2==0,3x^2 y-y^3==1},{x,y},Reals]
```

この解は実数の $\sqrt[3]{\ }$ で表せる ($z = -i, \dfrac{\pm\sqrt{3}+i}{2}$)。
ところが $z^3 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ はうまく行かない。(この辺は角の三等分とも関係する。30° の三等分は、実数の $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt{\ }$ では表せない。三角関数を使って答えを表す。)

一方、これを書いているときに気づいたのだけど、今の Mathematica は、$z^{17} = 1$ を $\sqrt{\ }$ で解けるようになっている (Mathematica 12 で確認)。

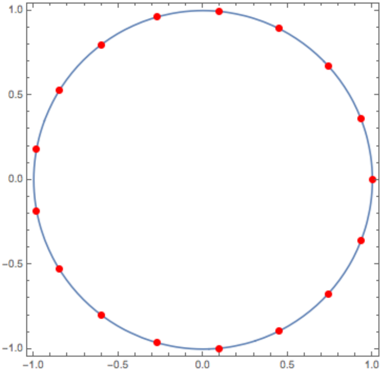
```
ComplexExpand[Solve[z^17==1,z]]
ToRadicals[%]
```

(そのうち Mathematica が $z^{257} = 1$ を解けるようになるだろうか?)

遊び (脱線) の時間: Mathematica で $z^n = c$ を解く

前のスライドの最後の結果はごちゃごちゃしているけれど、本当に 17 等分点だろうか？

```
g0 = ContourPlot[x^2 + y^2 == 1, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]
plotpoints[l_]:=Show[g0,ListPlot[l,PlotStyle->Directive[Red,PointSize[Large]]]]
points17={Re[z],Im[z]}/.ToRadicals[ComplexExpand[Solve[z^17==1,z]]]
regular17gon=plotpoints[points17]
```



参考文献

[1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート. http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/complex2020.pdf (2014〜).

[2] 高木貞治：近世数学史談及雑談, 共立出版 (1946), 1996 年に「近世数学史談・数学雑談復刻版」として復刻されている。また 1995 年に岩波文庫に「近世数学史談」が入った。

[3] 栗原将人：ガウスの数論世界をゆく: 正多角形の作図から相互法則・数論幾何へ, 数学書房 (2017/5/15).

[4] ヴィクター J. カッツ：カッツ 数学の歴史, 共立出版 (2005), 上野 健爾・三浦伸夫監訳, 中根美千代・高橋秀裕・林知宏・大谷卓史・佐藤賢一・東慎一郎・中澤聡翻訳. 原著は、Victor J. Katz, A History of Mathemaitcs, A: An Introdunction, Second Edition, Addison Wesley Longman (1998).