

複素関数・同演習 第2回

～複素数の定義、複素平面、平方根、共役複素数、絶対値～

かつらだ まさし
桂田 祐史

<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/complex/>

2020年9月23日

目次

- 1 本日の内容・連絡事項
- 2 複素数の定義とその性質
 - 高校で習ったこと $+α$
- 3 複素数の定義とその性質
 - 複素数の定義
 - 3つの方法の紹介
 - 復習 可換体の公理
 - Hamilton の四元数
 - 順序その他 (他の体 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \dots$ との比較)
 - 複素(数)平面, Gauss 平面
 - 平方根
 - 定義
 - 平方根の求め方をマスター
 - 実数の平方根と $\sqrt{\quad}$
 - 平方根 演習
 - 関数論における $\sqrt{\quad}$
 - 2次方程式
 - 共役複素数
 - 実係数多項式の根

- 大まかに講義ノート [1] §1.7 までの内容。
- 前回、書くのをすっかり忘れた (スライド PDF は訂正しておいた):
複素数全体の集合を \mathbb{C} で表す: $\mathbb{C} := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.
- 今回と次回は、複素数の基本的な演算の話が続く。退屈にならないように動機付け。

Cardano による 3 次方程式の解の公式は実用性が低いが、それを見ると複素数を考える必要性は分かりやすい。

- $\Delta > 0$ のときは? → 虚数の 3 乗根が必要になる (次回解説)。
- p, q が虚数のときは? → 虚数の平方根が必要になる (今回解説)。
- 今回は宿題 1 を出す。締め切り 9 月 29 日 13:30.

1.1 高校で習ったこと +α 前回最後の問の答

問 高校生のとき

$$\frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)} = \frac{x-yi}{x^2 - x \cdot yi + yi \cdot x - y^2 i^2} = \frac{x-yi}{x^2 + y^2}$$

のような計算をしたことがあるだろう。これを $x+yi$ の逆元が $\frac{x-yi}{x^2+y^2}$ であることの証明として採用できるだろうか？

答 このままでは採用できない。 $x+yi$ の逆元の存在と一意性が証明できていない段階では、 $\frac{1}{x+yi}$ はナンセンスな式であり、上の計算で分かるのは、「複素数 a, b, c ($b, c \neq 0$) について $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ 」が成り立ち、またもし $x+yi$ の逆元が一意的に存在するならば、それは $\frac{x-yi}{x^2+y^2}$ である、ということくらい。実際に逆元であることを確認する、例えば

$$\begin{aligned}(x+yi) \left(\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2} i \right) &= \left(x \frac{x}{x^2+y^2} - y \frac{-y}{x^2+y^2} \right) + \left(x \frac{-y}{x^2+y^2} + y \frac{x}{x^2+y^2} \right) i \\ &= \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + 0 \cdot i = 1\end{aligned}$$

のような計算をすることが必要である。

□

1.2 複素数の定義

3つの方法の紹介

高校のはいい加減である。ちゃんと定義する方法は色々ある。

① **Hamilton の方法** \mathbb{R}^2 に加法・乗法を

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

で定めると、 $(\mathbb{R}^2; +, \cdot)$ は可換体であり、

- 加法についての単位元は $(0, 0)$. (x, y) の逆元は $-(x, y) = (-x, -y)$.
- 乗法についての単位元は $(1, 0)$. (x, y) の逆元は

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

が成り立つ。これを証明するには、**可換体の公理**を満たすことをチェックするだけ。

この \mathbb{R}^2 のことを \mathbb{C} と表す。

普通の数ベクトル空間 \mathbb{R}^2 の拡張ととらえると分かりやすいかもしれない。
 (a, b) を $a + bi$ と書くことにする。

復習 可換体の公理

K が**可換体**とは、加法について可換群、加法の単位元 0_K を除いて乗法について可換群、そして分配法則を満たすこと。

$$\textcircled{1} \quad (\forall a, b, c \in K) \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$\textcircled{2} \quad (\exists 0_K \in K) (\forall a \in K) \quad a + 0_K = 0_K + a = a$$

$$\textcircled{3} \quad (\forall a \in K) (\exists a' \in K) \quad a + a' = a' + a = 0_K$$

$$\textcircled{4} \quad (\forall a, b \in K) \quad a + b = b + a$$

$$\textcircled{5} \quad (\forall a, b, c \in K) \quad (ab)c = a(bc)$$

$$\textcircled{6} \quad (\exists 1_K \in K) (\forall a \in K) \quad a1_K = 1_K a = a$$

$$\textcircled{7} \quad (\forall a \in K \setminus \{0_K\}) (\exists a'' \in K) \quad aa'' = a''a = 1_K$$

$$\textcircled{8} \quad (\forall a, b, c \in K) \quad (a + b)c = ac + bc, \quad a(b + c) = ab + ac$$

$$\textcircled{9} \quad (\forall a, b \in K) \quad ab = ba$$

$K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はこの公理を満たす。

$K = \mathbb{H}$ (後で紹介する四元数体) は (1)–(8) を満たすが、(9) は満たさない。

1.2 複素数の定義

3つの方法の紹介

- ② 行列を用いる方法 2次正方行列全体 $M_2(\mathbb{R})$ の部分集合 \mathbb{C} を

$$\mathbb{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

で定めると、行列の通常のと積を演算として、 \mathbb{C} は可換体になる。

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと、それぞれ $1, i$ に対応し、

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = aI + bJ, \quad J^2 = -I.$$

(後で出て来る $e^{i\theta}$ に対応する行列は、 $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ (回転の行列) になる。)

1.2 複素数の定義

3つの方法の紹介

(もしも可換環とそのイデアルについて知識があれば)

- ③ \mathbb{C} を実係数多項式環 $\mathbb{R}[x]$ を、そのイデアル $(x^2 + 1)$ で割った剰余環とする:

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1).$$

$(x^2 + 1)$ は $\mathbb{R}[x]$ の極大イデアルなので、その剰余環 \mathbb{C} は可換体となる。
難しい? …… これは高校数学流の完全化・厳密化と言える。

もう少し噛み砕いた説明が読みたければ、飯高 [2] を見よ (ネットでアクセス可能)。

1.2 複素数の定義

おまけ: Hamilton の四元数

Hamilton (1805–1865) は三元数を探して成功しなかったが、^{しげんすう}四元数 (quaternion) を発見した。

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$
$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

(これから $ij = k, jk = i, ki = j$ が導かれる。)

\mathbb{H} は実は非可換体である。四元数体 (the skew field of Hamilton quaternions) と呼ばれる。

最近は結構応用されている。

四元数については、例えば堀 [3], 今野 [4] を見よ。

1.3 順序その他 (他の体 \mathbb{Q} , \mathbb{R} , ... との比較)

\mathbb{C} は**順序体**ではない。

その代わり (?) 大きなアドバンテージがある: **代数的閉体** (1 次以上の任意の代数方程式がその中に根を持つ \therefore **代数学の基本定理**が成立)。

\mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} について。

- \mathbb{Q} は可換体かつ順序体だが完備ではない。
- \mathbb{R} は可換体かつ順序体かつ完備であるが、代数的閉体ではない (2 次方程式の解すら存在しないこともある)。注: 完備性は解析学にとっては非常に有効
- \mathbb{C} は可換体かつ完備かつ代数的閉体であるが、順序体ではない。

(参考) Hamilton の四元数体 \mathbb{H} は、体ではあるが可換性は成り立たない。順序体でもない。

1.4 複素(数)平面, Gauss 平面

2つ並べて図を描く。

\mathbb{C} は拡張 \mathbb{R}^2 だから、本質的には座標平面の話と同じ。「実軸」, 「虚軸」

1.5 平方根 定義

定義 2.1 (複素数の平方根)

複素数 c に対して、 $z^2 = c$ を満たす複素数 $z \in \mathbb{C}$ を c の**平方根** (square root of c) とよぶ。

注意: 平方根と $\sqrt{\quad}$ の区別が重要。 \mathbb{R} では簡単だった (説明できますか? この後のスライドで復習する。)

\mathbb{C} では? \sqrt{c} という記号については後回し。まずは平方根。

1.5 平方根 平方根の存在

定理 2.2 (複素数の平方根)

任意の複素数 c に対して、 c の平方根 z が存在する。 $c = 0$ のときは $z = 0$ のみ、 $c \neq 0$ のときは c の平方根はちょうど 2 つ存在 (互いに他方の -1 倍)。 $c = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) とするとき

$$(1) \quad z = \begin{cases} \pm\sqrt{a} & (a \geq 0, b = 0) \\ \pm\sqrt{-ai} & (a < 0, b = 0) \\ \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + \frac{b}{|b|} \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} i \right) & (b \neq 0) \end{cases}$$

(ここに現れた $\sqrt{\quad}$ は非負実数の平方根である。)

この式は覚えなくて (間違える可能性が高いから)、**求め方を覚えて、必要**なときに**求められる**ようにしておくのを勧める。

1.5 平方根 平方根の求め方をマスター

例 2.3

$z^2 = 1 - i$ を満たす複素数 z を求めよ ($1 - i$ の平方根を求めよ)。

(解答)

$z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とおくと、 $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ であるから

$$z^2 = 1 - i \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1 \wedge 2xy = -1.$$

$2xy = -1$ より $y = -\frac{1}{2x}$. これを $x^2 - y^2 = 1$ に代入して

$$4x^4 - 4x^2 - 1 = 0.$$

$x \in \mathbb{R}$ であるから $x^2 \geq 0$ であることに注意すると (2次方程式を解いて)

$$x^2 = \frac{2 + \sqrt{2^2 + 4}}{4} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{4}.$$

ゆえに

$$x = \pm \frac{\sqrt{2\sqrt{2} + 2}}{2}.$$

1.5 平方根 平方根の求め方をマスター

例 2.3 (つづき)

これから

$$y = -\frac{1}{2x} = \mp \frac{2}{2\sqrt{2\sqrt{2}+2}} = \mp \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}+2}} = \mp \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}.$$

ただし x, y を表す式の複号はすべて同順である。ゆえに

$$z = x + yi = \pm \left(\frac{\sqrt{2\sqrt{2}+2}}{2} - \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}i \right).$$

1.5 平方根 実数の平方根と $\sqrt{\quad}$

中学校で次のことを学んだ。

- ① $c \in \mathbb{R}$ に対して $x^2 = c$ を満たす $x \in \mathbb{R}$ が存在するためには、 $c \geq 0$ であることが必要十分である。
- ② $c \geq 0$ のとき、 x の平方根 x で $x \geq 0$ を満たすものはただ1つ存在する。
それを \sqrt{c} と表す。
- ③ $c = 0$ であれば c の平方根は 0 のみで、 $\sqrt{c} = 0$ 。
- ④ $c > 0$ であれば c の平方根は \sqrt{c} と $-\sqrt{c}$ の2つ。
- ⑤ 任意の $c_1, c_2 \geq 0$ に対して

$$\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1c_2}.$$

高校で、 $c < 0$ に対して、 $\sqrt{c} := \sqrt{-c}i$ と定義した (例えば $\sqrt{-1} = i$, $\sqrt{-3} = \sqrt{3}i$). この講義では、この定義は採用しないことにする。

**中学校で学んだ $\sqrt{\text{非負実数}}$ という記号は使い続けるが、
高校で学んだ $\sqrt{\text{負数}}$ という記号は断りなしに使わない。**

1.5 平方根 演習

- ① 任意の $c_1, c_2 \geq 0$ に対して $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1c_2}$ であることを示せ。
- ② 負の実数 c に対して $\sqrt{c} := \sqrt{-c}i$ と定義した場合、
 $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1c_2}$ とは限らないことを示せ。

(解答はこのスライド PDF の最後に置いておく。)

1.5 平方根 (5) 関数論における $\sqrt{\quad}$ (事故多発地点)

$c \geq 0$ のときは、特に断りのない限り、 \sqrt{c} は c の非負の平方根を表すことにする (これまで通り)。

それ以外の場合は、 \sqrt{c} が何を表すかは、そのとき考えている問題に応じて決める (言い換えると一般的な定義はしない)。

色々な場合がある。

- Ⓐ \sqrt{c} で c の平方根のうち特定の1つを (何かルールを決めて) 表す。
- Ⓑ \sqrt{c} で c の平方根のうちどちらかを表す (どちらであるか具体的なルールは決めない)。
- Ⓒ \sqrt{c} で c の平方根の両方を表す。

例えば $\sqrt{-3}$ は $\sqrt{3}i$ かもしれないし、 $-\sqrt{3}i$ かもしれないし、 $\pm\sqrt{3}i$ の両方を指しているかもしれない。

次の2次方程式の解の公式では、 $\sqrt{\quad}$ は $\pm\sqrt{\quad}$ という形で現れるので、どれを採用しても同じ内容を表すことになる。

1.5 平方根 2次方程式

系 2.4 (複素係数2次方程式)

$a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ とする。2次方程式 $az^2 + bz + c = 0$ の解は

$$(2) \quad z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

ここで $\sqrt{b^2 - 4ac}$ は $b^2 - 4ac$ の平方根のどれかを表すとする (2つある場合、どちらを選んでも、 z は同じものを表す)。

$D := b^2 - 4ac$ とするとき、 $D \neq 0$ なら2つ、 $D = 0$ ならば1つ (重根)。

証明 (実係数2次方程式のときと同様に、平方完成を行って移項すると)

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

$b^2 - 4ac$ の平方根のうちの任意の1つを $\sqrt{b^2 - 4ac}$ と表すとき、 $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ の平方根は

$$\pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (\because \left(\pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 = \frac{(\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}) \quad \text{ゆえに}$$

$$z + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad \text{移項して } z \text{ が求まる。} \quad \square$$

1.6 共役複素数 定義と基本的性質

$$(3) \quad z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

の**共役複素数** (the complex conjugate of z) \bar{z} を次式で定める。

$$(4) \quad \bar{z} := x - yi$$

一般に以下が成立する

$$(5) \quad \overline{\bar{z}} = z.$$

$$(6) \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z} \bar{w}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}.$$

(3つ目は $z = x + yi$, $w = u + iv$ と置いて証明。4つ目は3つ目を利用する。)

$$(7) \quad x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad \text{すなわち} \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

ゆえに、 x, y で表せるものは、 z, \bar{z} で表せる。

$$(8) \quad z = \bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}.$$

1.6 共役複素数 実係数多項式の根

高校数学で次のような問題はおなじみ。

- $1 + 2i$ が $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) の解ならば、 $1 - 2i$ も解である。
- $1 + 2i$ が $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) の解ならば、 $1 - 2i$ も解である。

定理 2.5 (実係数多項式の根の共役複素数も根)

$n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ に対して $f(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n$ と置く。
 $c \in \mathbb{C}$ が $f(c) = 0$ を満たすならば、 $f(\bar{c}) = 0$ 。

証明

$$\begin{aligned}\overline{f(c)} &= \overline{a_0c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \dots + a_{n-1}c + a_n} \\ &= \overline{a_0} \overline{c^n} + \overline{a_{n-1}} \overline{c^{n-1}} + \dots + \overline{a_{n-1}} \overline{c} + \overline{a_n} \\ &= \overline{a_0} (\bar{c})^n + \overline{a_{n-1}} (\bar{c})^{n-1} + \dots + \overline{a_{n-1}} \bar{c} + \overline{a_n} \\ &= a_0 (\bar{c})^n + a_{n-1} (\bar{c})^{n-1} + \dots + a_{n-1} \bar{c} + a_n \\ &= f(\bar{c})\end{aligned}$$

が成り立つので

$$f(c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{f(c)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\bar{c}) = 0. \quad \square$$

1.7 絶対値

$z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) の絶対値 (absolute value, modulus, magnitude) $|z|$ を次式で定義する。

$$(9) \quad |z| = |x + yi| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

これは、対応する \mathbb{R}^2 の要素 (数ベクトル) (x, y) の普通の大きさ (長さ, ノルム) と同じである。

$$(10) \quad |-z| = |z|, \quad |\bar{z}| = |z| \quad (\text{図を描いてみる}),$$

さらに

$$(11) \quad z\bar{z} = |z|^2$$

が成り立つ。実際

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = |z|^2.$$

ゆえに $z \neq 0$ ならば

$$(12) \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

1.7 絶対値

定理 2.6 (絶対値の性質)

- ① $|z| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow z = 0$.
- ② $|z + w| \leq |z| + |w|$
- ③ $|zw| = |z| |w|$. (系として、 $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$)
- ④ $|z - w| \geq ||z| - |w||$.

証明

- ① \mathbb{R}^2 のノルムについての「 $\|\mathbf{x}\| \geq 0$. 等号成立 $\Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 」と同じ。
- ② \mathbb{R}^2 のノルムについての「 $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ 」と同じ。
- ③ $z = a + bi, w = c + di$ において、左辺&右辺を計算して比較するか、 $|zw|^2 = zw\bar{z}\bar{w} = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2 = (|z| |w|)^2$ の $\sqrt{\quad}$ を取る。
- ④ $|z| = |z - w + w| \leq |z - w| + |w|$ であるから $|z| - |w| \leq |z - w|$.
 z と w を入れ替えて $|w| - |z| \leq |w - z| = |z - w|$.
まとめると $||z| - |w|| = \max\{|z| - |w|, |w| - |z|\} \leq |z - w|$. □

宿題1について (提出方法の注意)

宿題1を出します。課題文を書いたPDFや、締め切り、提出方法等は Oh-o! Meiji の「レポート」を見て下さい。

注意事項

- 普通の数式として無理なく読み取れる, A4 サイズの PDF, の2つが条件です。作成方法は何でも構いません。紙に手書きしたものをスキャンした PDF、 \LaTeX や Word で作成した PDF, なんでも受け付けます。数式の入力方法がよく分からない場合は、無理をせず手書きを選んで下さい。
- 出来る限り、ファイル1つだけで提出して下さい。春学期の他の科目で、2ページになった場合に、1ページずつファイルを送って来た人がいましたが、添削して返却するときの処理が意外と面倒です。複数の PDF を1つにまとめることは Mac のプレビューで出来るので、そうしたものを提出して下さい。
- レポートの1ページ目の上部に学年・組・番号・氏名を記して下さい。

問

- ① 任意の $c_1, c_2 \geq 0$ に対して $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1c_2}$ であることを示せ。
- ② 負の実数 c に対して $\sqrt{c} := \sqrt{-c}i$ と定義した場合、 $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1c_2}$ とは限らないことを示せ。

解答

- ① $(\sqrt{c_1}\sqrt{c_2})^2 = (\sqrt{c_1})^2 (\sqrt{c_2})^2 = c_1c_2$. また $\sqrt{c_1} \geq 0, \sqrt{c_2} \geq 0$ であるから、 $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} \geq 0$. ゆえに $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = \sqrt{c_1c_2}$.
- ② $c_1 = -1, c_2 = -1$ とするとき

$$\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} = i \cdot i = -1, \quad \sqrt{c_1c_2} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

であるから $\sqrt{c_1}\sqrt{c_2} \neq \sqrt{c_1c_2}$. □

参考文献

- [1] 桂田祐史：複素関数論ノート, 現象数理学科での講義科目「複素関数」の講義ノート.
<http://nalab.mind.meiji.ac.jp/~mk/lecture/complex-function-2020/complex2020.pdf> (2014~).
- [2] 飯高茂：大学生にきちんと虚数を教えよう — コーシーの定理を教える前に — (第49回公私立数学系学科懇談会の活動報告), 数学通信, Vol. 15, No. 1, pp. 46–53 (2010年3月26日), <http://mathsoc.jp/publication/tushin/1501/1501iitaka.pdf>.
- [3] 堀源一郎：ハミルトンと四元数 人・数の体系・応用, 海鳴社 (2007).
- [4] 今野紀雄：四元数, 森北出版 (2016/12/1).