複合機スキャン用紙

宿題 9　(2019/11/27 出題, 12/3(火) 3 限提出, 裏面使用可)

・学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
・文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

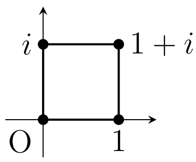
Score 採点結果			

Student's ID 学生番号											Name 氏名	
Department 所属	Faculty 学部		Department 学科				Subject/Teacher 科目/教員名	/				
Class 年・組・番号	Grade 年		Class 組		Number 番		Date 日付	Year 年		Month 月		Day 日

問 9　以下の線積分の値を求めよ。(1) と (2) については曲線 C の像 C^* の図を描け。

(1) $C\colon z = t + it^3$ $(t \in [0,1])$ とするとき $I_1 = \displaystyle\int_C \operatorname{Im} z\, dz$　(2) $c \in \mathbb{C},\ r > 0,\ n \in \mathbb{Z},\ C\colon z = c + re^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ とするとき $I_2 = \displaystyle\int_C (z-c)^n\, dz$　(3) 0 から $1+i$ に至る線分を C とするとき $I_3 = \displaystyle\int_C \operatorname{Re} z\, dz$

(4) 単位円 $|z| = 1$ の上半分を 1 から -1 までたどる曲線を C とするとき $I_4 = \displaystyle\int_C \overline{z}\, dz$　(5) 図の正方形の周を反時計回りに一周する曲線を C とするとき $I_5 = \displaystyle\int_C |z|\, dz$, $I_6 = \displaystyle\int_C \left(z^2 + 3z + 4\right) dz$



(ヒント: 正則な関数の場合は計算は簡単)

問 9 解説　原始関数が存在するならそれを使う、そうでないなら定義式に代入して地道に計算する。

(1) $z = t + it^3$ $(t \in [0,1])$ より $\dfrac{dz}{dt} = 1 + 3it^2$, $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im}\left(t + it^3\right) = t^3$ であるから

$$I_1 = \int_0^1 t^3 \cdot (1 + 3it^2) dt = \int_0^1 t^3\, dt + 3i \int_0^1 t^5\, dt = \frac{1}{4} + 3i \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{4} + \frac{i}{2}.$$

(2) $n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$ のとき、$(z-c)^n$ は $\dfrac{(z-c)^{n+1}}{n+1}$ を原始関数に持つので、閉曲線に沿う線積分は 0 である: $I_2 = 0$.

$n = -1$ のとき。$z = c + re^{i\theta}$ $(\theta \in [0, 2\pi])$ であるから、$z - c = re^{i\theta}$, $dz = ire^{i\theta}\, d\theta$. ゆえに

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{i\theta}} \cdot ire^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

(3) C のパラメーター付けとして、$z = (1+i)t$ $(t \in [0,1])$ が取れる。このとき、$dz = (1+i)dt$, $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}\left[(1+i)t\right] = t$ であるから

$$I_3 = \int_0^1 t \cdot (1+i) dt = (1+i) \int_0^1 t\, dt = \frac{1+i}{2}.$$

(4) C のパラメーター付けとして、$z = e^{i\theta}$ $(\theta \in [0, \pi])$ が取れる。このとき $dz = ie^{i\theta} d\theta$, $\overline{z} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ であるから

$$I_4 = \int_0^{\pi} e^{-i\theta} \cdot ie^{i\theta}\, d\theta = i \int_0^{\pi} d\theta = i\pi.$$

(5) $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, $C_1\colon z = t$ $(t \in [0,1])$, $C_2\colon z = 1 + it$ $(t \in [0,1])$, $C_3\colon z = 1 + i - t$ $(t \in [0,1])$, $C_4\colon z = i - it$ $(t \in [0,1])$ である。

- C_1 では、$dz = dt$, $|z| = |t| = t$. $\displaystyle\int_{C_1} |z| dz = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}.$
- C_2 では、$dz = i\, dt$, $|z| = \sqrt{1+t^2}$. $\displaystyle\int_{C_2} |z| dz = i \int_0^1 \sqrt{t^2+1}\, dt.$
- C_3 では、$dz = -dt$, $|z| = \sqrt{(1-t)^2 + 1^2}$. $\displaystyle\int_{C_3} |z| dz = -\int_0^1 \sqrt{(1-t)^2+1}\, dt = -\int_0^1 \sqrt{t^2+1}\, dt.$
- C_4 では、$dz = -i\, dt$, $|z| = 1 - t$. $\displaystyle\int_{C_4} |z| dz = \int_0^1 (1-t) dt = (-i) \int_0^1 t\, dt = -\frac{i}{2}.$

ゆえに

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_{C_1} |z|\, dz + \int_{C_2} |z|\, dz + \int_{C_3} |z|\, dz + \int_{C_4} |z|\, dz \\ &= \frac{1}{2} + (i-1) \int_0^1 \sqrt{t^2+1}\, dt - \frac{i}{2} = \frac{i-1}{2} \left(\sqrt{2} - 1 + \log(1+\sqrt{2})\right). \end{aligned}$$

$\displaystyle\int \sqrt{x^2+k}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+k} + k \log\left|x + \sqrt{x^2+k}\,\right|\right)$ は習ったはずだけど、知らない (覚えていない) 人もいるかもしれない。そういうのは自力で調べることを想定している。次ページを見よ。

I_5 を実部、虚部分けて書くと

$$I_4 = -\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1 + \log(\sqrt{2}+1)) + \frac{i}{2}\left(\sqrt{2} - 1 + \log(\sqrt{2}+1)\right).$$

C は閉曲線で、$z^2 + 3z + 4$ は原始関数 $\dfrac{z^3}{3} + \dfrac{3}{2}z^2 + 4z$ を持つので、$I_6 = \displaystyle\int_C \left(z^2 + 3z + 4\right) dz = 0.$ ■

講評　よくある失敗とか、面倒になってしまうやり方とかあって、そうしないように出題時に注意してあるのだけど、出来ていない人が少なくない (話聞かないのは数学以前の問題のような気がする)。　(1)「指数関数を三角関数に直さずに計算しなさい。」(そうしても面倒になるだけだし、複素指数関数等が使えるようになることがこの科目の目的の一つだろう。)　(2) 原始関数が存在する場合は、パラメーターで置き換えする必要はなく、特に閉曲線ならば積分は 0 とすぐ分かる。原始関数が存在するかどうか、注意すること。　(3) 曲線が複数のパートからなるとき、独立に線積分を計算してから、和を取れば良い。そうすることで曲線を表す式 ($z = \varphi(t)$ の $\varphi(t)$ のこと) が簡単になる。

微積分メモ　まず次は何らかのやり方 (自分の好きなやり方) で覚えることを勧める (答がどこに書いてあると覚えるでも可)。いざとなれば右辺を微分してチェックできる (やってごらん)。

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \log\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|.$$

$\displaystyle\int \sqrt{x^2+k}\,dx$ は「部分積分で求まる」ことを覚えておくと良い (似た例を経験しているはず)。

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+k}\,dx &= x\sqrt{x^2+k} - \int x\cdot\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+k}}\,dx \\ &= x\sqrt{x^2+k} - \int \frac{x^2+k-k}{\sqrt{x^2+k}}\,dx \\ &= x\sqrt{x^2+k} - \int \sqrt{x^2+k}\,dx + k\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}\end{aligned}$$

より

$$\int \sqrt{x^2+k}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+k} + k\log\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|\right).$$

ゆえに

$$\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1}+\log(x+\sqrt{x^2+1})\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right).$$

Mathematica で検算　ちなみに、次のコードで検算した。

```
li[fz_,c_]:=Integrate[(fz/. z->c[[1]])*D[c[[1]],t],{t,c[[2]],c[[3]]}]

lisum[fz_,c_]:=Sum[Integrate[(fz /. z -> c[[i]][[1]])*D[c[[i]][[1]], t], {t,
    c[[i]][[2]], c[[i]][[3]]}], {i, 1, Length[c]}]
```

例えば

```
li[Im[z],{t+I t^3,0,1}]
```

のように使う。

それから

```
In[1]:=Integrate[Sqrt[1 + x^2], {x, 0, 1}]
```

Out[1]= $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\mathrm{ArcSinh}[1]\right)$

ArcSinh を良く知っているならば (グラフがパッと思い浮かぶとか)、このままでも構わないかもしれないけれど、日本で普通に勉強していると知らないはず。次のように変換することを覚えよう。

```
In[2]:=TrigToExp[%]
```

Out[2]= $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2})$