複合機スキャン用紙　宿題 8　(2019/11/20 出題, 11/26(火) 3 限提出, 裏面使用可)

・学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
・文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score 採点結果

Student's ID 学生番号											Name 氏名	
Department 所属	Faculty 学部	Department 学科									Subject/Teacher 科目/教員名	/
Class 年・組・番号	Grade 年	Class 組	Number 番								Date 日付	Year 年 Month 月 Day 日

問 8　(1) 次の各方程式を解け。

(a) $v < 0$ とするとき $e^z = v$　(b) $e^z = \sqrt{3} - i$　(c) $\sin z = 1$　(d) $\sin z = 2i$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ を求めよ。(ヒント: 火曜日に $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ の和の求め方を説明した。)

問 8 解説

(1) $e^z = w$ を解くには、まず w の極形式 $w = re^{i\theta}$ $(r > 0, \theta \in \mathbb{R})$ を (何でも良いから 1 つ) 求め、後は公式 $w = \log r + i(\theta + 2n\pi)$ $(n \in \mathbb{Z})$ に代入する。

(a) $v < 0$ とするとき、$v = (-v) \cdot e^{\pi i}$ は v の極形式であるから

$$z = \log v = \log(-v) + (\pi + 2n\pi)i = \log(-v) + (2n+1)\pi i \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(b) $\left|\sqrt{3} - i\right| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$ であり、

$$\sqrt{3} - i = 2 \cdot \frac{\sqrt{3} - i}{2} = 2e^{-i\pi/6}$$

は $\sqrt{3} - i$ の極形式である。ゆえに

$$z = \log\left(\sqrt{3} - i\right) = \log 2 + i\left(-\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right) = \log 2 + \left(2n - \frac{1}{6}\right)\pi i \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(c) $X = e^{iz}$ とおくと

$$\sin z = 1 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 1 \Leftrightarrow X - \frac{1}{X} = 2i \Leftrightarrow X^2 - 1 = 2iX \Leftrightarrow X^2 - 2iX - 1 = 0.$$

これは $(X - i)^2 = 0$ と気づけば、すぐに $X = i$ と解ける。気がつかなくても 2 次方程式の解の公式から、$X = i \pm \sqrt{i^2 + 1} = i$ と解ける。i の極形式として $i = 1 \cdot e^{i\pi/2}$ が取れるので、

$$\sin z = 1 \Leftrightarrow e^{iz} = i \Leftrightarrow iz = \log i = \log 1 + \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)i = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

ゆえに

$$z = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(d)

$$\sin z = 2i \Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2i \Leftrightarrow X - \frac{1}{X} = -4 \Leftrightarrow X^2 + 4X - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow X = -2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 1 \cdot 1} \Leftrightarrow e^{iz} = -2 \pm \sqrt{5}.$$

$-2 \pm \sqrt{5}$ の極形式として、$-2 + \sqrt{5} = (\sqrt{5} - 2)e^{i0}$, $-2 - \sqrt{5} = (\sqrt{5} + 2)e^{i\pi}$ が得られるので

$$iz = \log\left(-2 \pm \sqrt{5}\right) = \log\left(\sqrt{5} - 2\right) + 2n\pi i, \log(\sqrt{5} + 2) + (2n+1)\pi i \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

ゆえに

$$z = (2n+1)\pi - i\log(\sqrt{5} + 2), 2n\pi - i\log\left(\sqrt{5} - 2\right) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

(2) $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = e^z$ を項別微分して $e^z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1}$. z をかけて $ze^z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^n$. また項別微分して $e^z + ze^z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} z^{n-1}$. z をかけて $z(1+z)e^z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} z^n$. これに $z = 1$ を代入して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = 1 \cdot (1+1)e^1 = 2e.$$

別解 1: $n^2 = n(n-1) + n$ であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)+n}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} = 2e.$$

別解 2: 2 回目の z のかけ算を省略して、$e^z + ze^z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} z^{n-1}$ に $z = 1$ を代入しても良い。■