複合機スキャン用紙　　宿題 7　(2019/11/13 出題, 11/19(火) 3 限提出, 裏面使用可)

- 学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
- 文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score 採点結果

Student's ID 学生番号											Name 氏名	
Department 所属	Faculty 学部	Department 学科						Subject/Teacher 科目/教員名	/			
Class 年・組・番号	Grade 年	Class 組	Number 番					Date 日付	Year 年	Month 月	Day 日	

問 7　(2), (3) において、e^z, $\cos z$, $\sin z$ は、冪級数を用いて定義したとして解答せよ。

(1) $f(z) = \dfrac{-z^3 + 3z^2 + 8z + 14}{z^2 - 2z - 8}$ を 1 のまわりで冪級数展開せよ。その収束半径も求めよ。

(2) $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ が成り立つことを示せ。

(3) 0 の周りの収束冪級数の和 $E(z)$ が $E'(z) = E(z)$ を満たすとき、$E(z)$ を求めよ。また、(そのことを利用して) 指数法則 $e^{z+a} = e^z e^a$ $(z, a \in \mathbb{C})$ を示せ。「また」以降は出題ミスなので削除します。

この答案は返却できなくなったので、特に重要な問 (1) によくあった間違いを説明します (2020/1/26)。

(i) 冪級数展開の結果の整理が不十分な答案。以下の模範答案では

$$f(z) = -\frac{8}{3} - \frac{11}{9}(z-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} - \frac{5}{3}}{3^n}(z-1)^n.$$

としてありますが、

$$f(z) = -\frac{13}{9} - \frac{11}{9}z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} - \frac{5}{3}}{3^n}(z-1)^n.$$

とする人が多かった。$f(z)$ を 1 の周りで冪級数展開するというのは

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n \quad (\text{ある } R > 0 \text{ が存在して } |z-1| < R \text{ を満たす } z \text{ すべてに対し成立})$$

という式が成り立つ $\{a_n\}$ を求めるということなので、a_0 が「見えない」のは不十分です。(冪級数展開のよくある応用に、$f(z)$ を含む式の、$z \to 1$ での極限を計算するという問題があるけれど、そういう場合に a_0 が何であるかは、重要です。)

例えば $z^2 + 2z + 3$ という式の場合、$w = z - 1$ でまとめたいわけで、$z = w + 1$ を代入して展開すれば

$$z^2 + 2z + 3 = (w+1)^2 + 2(w+1) + 3 = w^2 + 4w + 6 = (z-1)^2 + 3(z-1) + 6.$$

(能率を考えると、$z - 1$ で割ることを繰り返して、最後に剰余を拾うという計算が便利だけれど、次数が低いならば、$w = z - c$ とおいて、$z = w + c$ を代入して展開するので十分でしょう。)

(ii) 収束半径についての扱いがおかしな答案。

まず、1 の周りの冪級数展開なのだから、「$|z-1| < \rho$ ならば収束、$|z-1| > \rho$ ならば発散」となる ρ がただ 1 つ存在する。(その ρ が収束半径であり) その ρ を求めなさい、という意味であることを確認しておきます。

(a) 収束 $\Leftrightarrow |z-1| < 3$ の後に「ゆえに $|z| < 4$」とかしてあるもの。$|z-1| < 3 \Rightarrow |z| < 4$ だけれど、逆は成り立ちません。これは問われていることに答えていません (はっきり間違いです)。

(b) 「収束半径 $|z-1| < 3$」というのが多かった (繰り返しになるけれど、収束半径というのは、実数または $+\infty$ のはずなのに、不等式を書くのは雑すぎる。)。

(c) 途中で収束の確認を一切しないで、$f(z)$ の展開式を求めてから、「収束 $\Leftrightarrow |(z-1)/3| < 1$」と書く人がかなりいました。この問題の $f(z)$ の冪級数展開は等比級数ではないので、根拠として認められません。

(1) $\dfrac{-3}{z+2}$, $\dfrac{5}{z-4}$ を展開したときに、個別に収束の確認をして最後にまとめる
(普通はこうすることを勧めます。)

(2) 最後に d'Alembert の判定法を使って判定する

(3) 最後に Cauchy-Hadamard の判定法を使って判定する

(4) 「c における冪級数展開の収束半径は、c と他の特異点までの距離」(これは授業最終回で紹介した定理) を使う。
(1 と $\{-2, 4\}$ との距離は 3 なので $\rho = 3$, という答え方になる。)

などの方法が使えないか検討することになります。この問題は実は難しめで (ちょっと出題時うっかりした)、(1), (2) は役に立ちません。この宿題 7 を出したときは (4) を説明していないので、(3) が唯一の方法かもしれません。以下の模範答案は (3) を使っています。

問 7 解説

(1) $-z^3+3z^2+8z+14$ を z^2-2z-8 で割ると、商が $-z+1$, 余りが $2z+22$ であるから、

$$f(z)=\frac{-z^3+3z^2+8z+14}{z^2-2z-8}=\frac{(-z+1)(z^2-2x-8)+2z+22}{z^2-2z-8}=1-z+\frac{2z+22}{(z-4)(z+2)}.$$

$z-4$, $z+2$ は互いに素であるから

$$\frac{2z+22}{(z-4)(z+2)}=\frac{A}{z+2}+\frac{B}{z-4}$$

を満たす A, B が存在する。ともに次数が 1 より小さいので定数である。分母を払って

$$2z+22=A(z-4)+B(z+2)\quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{-2,4\}).$$

これは恒等式である (1 次関数が 2 個以上の点で等しければ、恒等的に等しい)。

$z=-2$ を代入して、$18=-6A$ から $A=-3$. $z=4$ を代入して、$30=6B$ から $B=5$. これから次の部分分数分解が得られる。

$$f(z)=1-z+\frac{-3}{z+2}+\frac{5}{z-4}.$$

$1-z$ の 1 のまわりの冪級数展開は、$1-z=-(z-1)$.

$\dfrac{-3}{z+2}$ の 1 のまわりの冪級数展開は、

$$\frac{-3}{z+2}=\frac{-3}{(z-1+1)+2}=\frac{-3}{3+(z-1)}=\frac{-1}{1+(z-1)/3}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}(z-1)^n.$$

これは公比 $-(z-1)/3$ の等比級数であるから、収束 $\Leftrightarrow$ $|$公比$|<1$ $\Leftrightarrow$ $|-(z-1)/3|<1$ $\Leftrightarrow$ $|z-1|<3$.

$\dfrac{5}{z-4}$ の 1 のまわりの冪級数展開は、

$$\frac{5}{z-4}=\frac{5}{(z-1+1)-4}=\frac{5}{(z-1)-3}=\frac{5}{-3\,(1-(z-1)/3)}=-\frac{5}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n(z-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-5}{3^{n+1}}(z-1)^n.$$

これは公比 $(z-1)/3$ の等比級数であるから、収束 $\Leftrightarrow$ $|$公比$|<1$ $\Leftrightarrow$ $|(z-1)/3|<1$ $\Leftrightarrow$ $|z-1|<3$.

以上より $f(z)$ の 1 の周りの冪級数展開は

$$\begin{aligned}
f(z)&=-(z-1)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}(z-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-5}{3^{n+1}}(z-1)^n\\
&=-(z-1)+\left(-1+\frac{z-1}{3}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}(z-1)^n\right)+\left(-\frac{5}{3}-\frac{5}{9}(z-1)-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{5}{3^{n+1}}(z-1)^n\right)\\
&=-\frac{8}{3}-\frac{11}{9}(z-1)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}-\frac{5}{3}}{3^n}(z-1)^n.
\end{aligned}$$

この級数は $|z-1|<3$ ならば収束する (ゆえに収束半径が 3 以上であることが分かる)。収束半径が 3 であることの確認は少し手間がかかる。

$$a_n:=\frac{(-1)^{n-1}-\frac{5}{3}}{3^n}\quad (n\ge 2)$$

とおくとき、

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{3}\times\begin{cases}\left(\frac{2}{3}\right)^{1/n} & (n\ \text{が奇数のとき})\\ \left(\frac{8}{3}\right)^{1/n} & (n\ \text{が偶数のとき})\end{cases}\to\frac{1}{3}\quad (n\to\infty).$$

ゆえに Cauchy-Hadamard の定理から

$$\rho=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=3.$$

解説　この問題のうち、収束半径を求めるところは、ついうっかり難しくしてしまった (宿題としては不適当だったかもしれない…一方講義ノートに載せる価値があるかも)。$\sum_n a_n(z-c)^n$, $\sum_n b_n(z-c)^n$ の収束半径をそれぞれ ρ_1, ρ_2 とするとき、$\rho_1 \neq \rho_2$ ならば、$\sum_n (a_n+b_n)(z-c)^n$ の収束半径は $\rho := \min\{\rho_1, \rho_2\}$ である[1]。

ところが、$\rho_1 = \rho_2$ の場合、$|z-c| < \rho_1$ ならば $\sum_n (a_n+b_n)(z-c)^n$ が収束するので、収束半径は ρ_1 以上であることが分かるが、$|z-c| > \rho_1$ ならば $\sum_n (a_n+b_n)(z-c)^n$ が収束しないことは、(反例があるので) 一般には証明できない。

そのため、$f(z)$ の c の周りの冪級数展開の収束半径が 3 であることは、別に証明を要することになっている。$a_n = \dfrac{(-1)^{n-1} - \frac{5}{3}}{3^n}$　$(n \geq 2)$ とおくとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ は存在しないので、d'Alembert の定理を使って収束半径を求めることは出来ない。幸い $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ は存在するので、Cauchy-Hadamard の定理の簡単なバージョンが使えて、上の解答例が出来た。

(2) $e^{iz} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $(z \in \mathbb{C})$ であるから

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n\left(1+(-1)^n\right)}{n!}z^n,$$
$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right) = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n\left(1-(-1)^n\right)}{n!}z^n.$$

$1+(-1)^n$ は、$n=2k$ のときは 2, そうでないときは 0. $1-(-1)^n$ は、$n=2k+1$ のときは 2, そうでないときは 0.

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k}\cdot 2}{(2k)!}z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k} = \cos z,$$
$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k+1}\cdot 2}{(2k+1)!}z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1} = \sin z.$$

(3) (前半)

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (|z| < \rho)$$

とおく。この収束冪級数 $E(z)$ の収束半径を ρ とおくと

$$E'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n \quad (|z| < \rho).$$

$E'(z) = E(z)$ が成り立つので

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n \quad (|z| < \rho).$$

---

[1]証明　まず $\rho_1 < \rho_2$ の場合を考える。$|z-c| < \rho_1$ ならば $|z-c| < \rho_2$ であるから、$\sum_n a_n(z-c)^n$ と $\sum_n b_n(z-c)^n$ は収束する。ゆえに $\sum_n (a_n+b_n)(z-c)^n$ も収束する。$\rho_1 < |z-c| < \rho_2$ ならば、$\sum_n a_n(z-c)^n$ は収束し、$\sum_n b_n(z-c)^n$ は収束しない。ゆえに $\sum_n (a_n+b_n)(z-c)^n$ は収束しない (もし収束するならば、$b_n(z-c)^n = (a_n+b_n)(z-c)^n - a_n(z-c)^n$ であるから、$\sum_n b_n(z-c)^n$ も収束することになり矛盾が生じるから)。ゆえに $\rho_1 < |z-c|$ ならば、$\sum_n (a_n+b_n)(z-c)^n$ は収束しない。以上から $\sum_n (a_n+b_n)(z-c)^n$ の収束半径は ρ_1 である。

同様に $\rho_1 > \rho_2$ の場合は、$\sum_n (a_n+b_n)(z-c)^n$ の収束半径は ρ_2 であることが証明できる。

収束冪級数の係数は一意的であるから

$$(\forall n \geq 0) \quad a_n = (n+1)a_{n+1}.$$

ゆえに $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}a_n$. これから $a_n = \dfrac{a_0}{n!}$ $(n \geq 0)$. ゆえに

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{n!} z^n = a_0 e^z \quad (a_0 \text{ は任意定数。} E \text{ を使うと } a_0 = E(0) \text{ と表せる。}).$$

なお、$\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = n+1 \to +\infty$ $(n \to +\infty)$ であるから、$\rho = +\infty$ である。

(後半) **これは出題ミス！とりあえず、考えていた解答を述べる**

任意の $a \in \mathbb{C}$ に対して、$E(z) := e^{z+a}$ $(z \in \mathbb{C})$ とおく。

任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して、$E'(z) = E(z)$ が成り立つ。($\because$ $w = z + a$ とすると、$E(z) = e^w$ であるから、

$$E'(z) = \frac{d}{dz}E(z) = \frac{d}{dw}e^w \cdot \frac{dw}{dz} = e^w \cdot 1 = e^{z+a} = E(z).$$

また、$E(z)$ は 0 の周りで収束冪級数で表されるので、前半に示したことから $E(z) = E(0)e^z$ が成り立つ。ゆえに $e^{z+a} = e^a e^z$.

しかし下線部が成り立つことの証明はそんなに簡単ではない。「絶対収束級数は並べ替えても同じ和を持つ」という定理を使って、級数の並べ替えをすれば証明出来るが、それをするくらいならば、直接 $e^{z+a} = e^z e^a$ が証明出来る。 ■

教科書に載っていた証明は、簡単に証明出来る事実しか使っていなくて、優れている。

指数法則の別証明 (教科書に載っているもの) $f(z) := e^z$ とおく。冪級数の項別微分定理により、$f'(z) = f(z)$ が成り立つことが分かる。任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して (積の微分法、合成関数の微分法を用いて)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left(f(z)f(c-z)\right) &= f'(z) \cdot f(c-z) + f(z) \cdot (-1)f'(c-z) \\ &= f(z)f(c-z) - f(z)f(c-z) = 0 \quad (z \in \mathbb{C}).\end{aligned}$$

ゆえに $f(z)f(c-z)$ は z によらない定数である。特に 0 での値に等しいから

$$f(z)f(c-z) = f(0)f(c) = 1 \cdot f(c) = f(c).$$

すなわち

$$(\forall c \in \mathbb{Z})(\forall z \in \mathbb{Z}) \quad f(z)f(c-z) = f(c).$$

任意の $a, b \in \mathbb{C}$ に対して $z := a$, $c := a + b$ とおくと、$f(z)f(c-z) = f(c)$ は $f(a)f(b) = f(a+b)$. すなわち $e^a e^b = e^{a+b}$. ■