



・ 学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
・ 文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score
採点結果

--	--	--

Student's ID 学生番号											Name 氏名	
Department 所属	Faculty 学部	Department 学科					Subject/Teacher 科目/教員名		/			
Class 年・組・番号	Grade 年		Class 組		Number 番		Date 日付		Year 年		Month 月	Day 日

問6 (1) 次の各関数を 0 のまわりで冪級数展開し、その収束半径を求めよ (等比級数の和の公式を利用して解答すること)。

(a) $f(z) = \frac{1}{4 - z}$ (b) $g(z) = \frac{4}{2z + 3}$ (c) $h(z) = \frac{1}{(z - i)^2}$ (d) $\varphi'(z) = \frac{1}{4 - z}, \varphi(0) = 1$ を満たす φ

(2) $F(z) = \frac{1}{4 - z}$ を -3 のまわりで冪級数展開し、その収束円を求めよ。

問6 解説

(1) 以下、収束半径を ρ と表す。

(a)

$$f(z) = \frac{1}{4-z} = \frac{1}{4(1-z/4)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{4}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+1}}.$$

(等比級数であるから) 収束 $\Leftrightarrow$ |公比| $< 1 \Leftrightarrow |z/4| < 1 \Leftrightarrow |z| < 4$ であるから、 $\rho = 4$.

(b)

$$g(z) = \frac{4}{2z+3} = \frac{4}{3(1+2z/3)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{2z}{3})} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \cdot (-2)^n}{3^{n+1}} z^n.$$

(等比級数であるから) 収束 $\Leftrightarrow$ |公比| $< 1 \Leftrightarrow |-2z/3| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{3}{2}$ であるから、 $\rho = \frac{3}{2}$.

($4 \cdot (-2)^n$ を $(-2)^{n+2}$ と書くとか、書き方は色々ある。)

(c)

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{-i(1-z/i)} = i \cdot \frac{1}{1+iz} = i \sum_{n=0}^{\infty} (-iz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n i^{n+1} z^n.$$

($\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{i^{n-1}}$, $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{i^{n+1}}$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n-1} z^n$, $i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{i}\right)^n$ など色々な表し方がある。)

これは等比級数であるから、収束 $\Leftrightarrow$ |公比| $< 1 \Leftrightarrow |-iz| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$. ゆえに、この冪級数の収束半径は 1. (任意の) 冪級数は収束円の内部で項別微分が出来るから

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{(z-i)^2} = -\left(\frac{1}{z-i}\right)' = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n i^{n+1} z^n\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n i^{n+1} n z^{n-1} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} i^{n+2} (n+1) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} i^n (n+1) z^n. \end{aligned}$$

($\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{i^{n+2}} z^n$ としても正しいです。) 冪級数は項別微分しても収束半径は変わらないので、 $\rho = 1$.

(d) (a) の結果から

$$\varphi'(z) = \frac{1}{4-z} = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+1}} \quad (\text{収束半径は } 4).$$

(任意の) 冪級数は収束円の内部で項別積分できると、 $\varphi(0) = 1$ であることから

$$\varphi(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{4^n n}.$$

冪級数は項別積分しても収束半径は変わらないので、 $\rho = 4$.

(2) -3 のまわりで冪級数展開するとは、 $z - (-3) = z + 3$ の冪級数に変形する、ということである。

$$F(z) = \frac{1}{4-(z+3-3)} = \frac{1}{7-(z+3)} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1-\frac{z+3}{7}} = \frac{1}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+3}{7}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+3)^n}{7^{n+1}}.$$

収束 $\Leftrightarrow$ |公比| $< 1 \Leftrightarrow |(z+3)/7| < 1 \Leftrightarrow |z+3| < 7$ であるから、収束円は $D(-3; 7)$. ■

注意点

- 詰めて書いてあって、そのせいか、大事なところを省略している人がいる。「裏面使用可」なのだから、ある程度スペースを空けて書く方が良い。詰めて書かれると添削もしにくい。

何というか…出来の良い答案は大抵適度なスペースがあって、添削する場合もとてもやりやすい。

- f を c の周りに冪級数展開するというのは、 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ という形 ($c=0$ のときは

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ という形) にするという意味なので、「冪級数展開せよ」と言われたら、 a_n が読み取りやすい形にするべきである。

$$\frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2z}{2}\right)^n \text{ は } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-2)^n}{3^{n+1}} z^n. \text{ あるいは、せめて } \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n z^n$$
$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)} \text{ は } 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{4^n n} \text{ は } (z^{n+1} \text{ より } z^n)$$

- 冪級数を得たら、その瞬間に「収束は？」と考えるべき。収束しない級数に対して操作を続けるのはナンセンスかもしれない。(1) の (c), (d) については、項別微分、項別積分する前の級数の収束のチェックをすべきである。
- 収束半径を、d'Alembert の公式を使って求めた人も多かったけれど、等比級数の収束条件を使って求めてほしかった (その練習用の問題なのだから — 項別微分、項別積分と収束半径の関係についてもマスターして欲しいので)。
- 収束半径が虚数の答案とかあった (そんな馬鹿な)。他にも $|i|$ のように答えるとか (絶対値って何か分かってますか？と聞きたくなる。 $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$)。
- 収束の議論をいい加減に書く人が少なくないので、いまさらだけど定義の確認。

ρ が $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ (i) $|z-c| < \rho$ ならば収束する, (ii) $|z-c| > \rho$ ならば発散する

等比級数となるケースで、「収束 $\Leftrightarrow |z-c| < \rho$ 」を言うと、(i) だけでなく、(ii) が成り立つことを理解しよう。

$\therefore$ 「収束 $\Rightarrow |z-c| < \rho$ 」が成り立てば、対偶「 $|z-c| \geq \rho \Rightarrow$ 収束しない」が成り立つので、「 $|z-c| > \rho \Rightarrow$ 発散する」が成り立つ。

- マズい答案の例

- 「収束 $\left|-\frac{2}{3}z\right| < 1 \quad |z| < \frac{3}{2} \quad \text{収束半径} = \frac{3}{2}$ 」 — そもそも論理がない。
- 「 $\left|-\frac{2}{3}z\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{3}{2}$. よって収束半径 $= \frac{3}{2}$ 」 — 何で大事な「収束 $\Leftrightarrow$ 」を省くんだろう？
- 「収束条件は $\left|-\frac{2}{3}z\right| < 1$. **よって** $|z| < \frac{3}{2}$. よって 収束半径 $= \frac{3}{2}$ 」 — 途中で一方通行になっている。「**よって**」でなくて「**すなわち**」ならよいけどね。
- 「収束 $\Leftrightarrow \left|-\frac{2}{3}z\right| < 1 \Rightarrow |z| < \frac{3}{2}$. よって 収束半径 $= \frac{3}{2}$ 」 — 同上

脱線 これは方程式を解くときもそうで、中学高校数学だと気楽に「ゆえに」とか、「 $\therefore$ 」と書くけれど、方程式を解くというのは、方程式という条件を満たすものを全て求めるということで、もし可能ならば条件の同値変形だけで済ませるのが望ましい。一箇所でも「ゆえに」を使ったら、解でないものが紛れ込む可能性があって、最後に得られたものが解であることを確認する作業が必要になる。もちろん確認作業をすれば言い訳だけど、そういうのをサボっている「解答」が多い。それは昔からの「馴れ合い」なのかもしれないけれど、マズいと思っています。

- 「収束の必要十分条件は $|\frac{2}{3}z| < 1$. **すなわち** $|z| < \frac{3}{2}$. ゆえに収束半径は $\frac{3}{2}$ 」は正しいけれど (「すなわち」は普通言い換えなので、 $\Leftrightarrow$ みたいなものです)、**「すなわち」** を「 $\therefore$ 」に置き換えた「収束の必要十分条件は $|\frac{2}{3}z| < 1$. $\therefore |z| < \frac{3}{2}$. ゆえに収束半径は $\frac{3}{2}$ 」はマズい。

- 「収束半径を求めよ?」となっているのに、収束円を答える人が少ない。そういうところはきちんとやって下さい。大事なことです。

- $D(c; r)$ という記号をきちんと覚えて下さい。 c 中心、半径 r の開円盤 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < r\}$ は $D(c; r)$ と書く。円盤 (disk, disc) だから D を使う。ほぼ毎回の授業に現われる記号なのだから正確に使えないのはおかしい。

(2) では収束円を尋ねていて、その記号を使うと $D(-3; 4)$ が答えだけれど、 $(-3; 4)$ とか $O(-3; 4)$ とか書く人がいる。「収束円 = $D(-3; 4)$ 」の書き間違いなのか、見間違いなのか、「収束円 $D = (-3; 4)$ 」とする人も少なくない。 $D(c; r)$ という記号を覚えよう。

- (1) の (c) や (d) で、最後になって「収束 $\Leftrightarrow$ |公比| $< 1 \dots$ 」と収束チェックを始める人がかなりいましたが、最後の級数は等比級数ではないので、それは正しくない。実際、(d) の場合は収束円の周上で収束することもあるようになり、「収束 $\Leftrightarrow |z| < 4$ 」は間違いである。「収束半径 = 4」は正しいけれど。

「冪級数は、収束円の内部で項別微分、項別積分出来て、収束半径は変わらない。」わけで、収束半径は変わらないけれど、収束条件は変わる場合がある。

- 「収束半径: 4」と書いたりする人がいるけれど、「収束半径 = 4.」とか「収束半径は4である。」の方が良い。
- $\frac{1}{4-z}$ を積分して $-\log|4-z|$ とした人がちらほら。それは全くの間違いである。念のため、大きな声で

$$\frac{d}{dz} \log |z| = \frac{1}{z} \text{ は成り立たない! (だから} \\ \int \frac{dz}{z} = \log |z| + C \text{ でない)}$$

(定数関数でない実数値関数 $\log |z|$ が正則であるはずがない。きちんと調べると、すべての点で微分出来ないことが分かる。)

$-\log(z-4)$ とするのもダメ。それは多価関数で、正則関数ではない。そもそも求めるべきものは冪級数なわけだし。

脱線 微積分に出て来る (つまり実関数の場合の)

$$\int \frac{dx}{x} = \log |x| + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

という式も、本当は良くないと僕は考えています。今さら伝統を捨てろと主張する気はないですが、もし過去に戻ってやり直せるならば

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \log x + C_1 & (x > 0 \text{ のとき}) \\ \log(-x) + C_2 & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (C_1, C_2 \text{ は積分定数})$$

とるように運動したい。普通は区間でしか考えないから、 $x > 0$ か $x < 0$ のどちらか一方が良いので、 C 1つで済ませて、ついでに $x, (-x)$ は $|x|$ と書いて、そうすれば場合わけする必要もない、ということなんでしょうけれど。