複合機スキャン用紙　宿題 5　(2019/10/23 出題, 10/29(火) 3 限提出, 裏面使用可)

・学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
・文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score 採点結果			

Student's ID 学生番号											Name 氏名	

Department 所属	Faculty 学部　Department 学科	Subject/Teacher 科目/教員名	/
Class 年・組・番号	Grade 年　Class 組　Number 番	Date 日付	Year 年　Month 月　Day 日

問 5　次の冪級数の収束半径と収束円を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+3)^n}{(n+1)^2}$　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$　(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^4}{5^n}(z-6)^n$　(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{3n+1}}{(-3)^n} = (z-1)-\frac{1}{3}(z-1)^4+\frac{1}{9}(z-1)^7-\cdots$

問 5 解説　冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ の収束半径を ρ とすると、収束円は $D(c;\rho)=\{z\in\mathbb{R}\mid |z-c|<\rho\}$ である。「$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ が収束するか $+\infty$ であれば、それは収束半径に等しい。(d'Alembert の公式; ratio test)」という定理がある。

次から解答。

(1) $c=-3$, $a_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{(1+0)^2}{(1+0)^2}=1.$$

ゆえに収束半径は 1, 収束円は $D(-3;1)$.

(2) $c=0$, $a_n=n!$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

ゆえに収束半径は 0, 収束円は $D(0;0)=\emptyset$.

(3) $c=6$, $a_n=\dfrac{n^4}{5^n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4}{5^n}\cdot\frac{5^{n+1}}{(n+1)^4}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{(1+1/n)^4}=5.$$

ゆえに収束半径は 5, 収束円は $D(6;5)$.

(4) $\zeta:=(z-1)^3$ とおくと

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{3n+1}}{(-3)^n}=(z-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{3n}}{(-3)^n}=(z-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{(-3)^n}.$$

(最後の等式は、その左右の級数が収束・発散、どちらの場合も成り立つ。つまり、片方が収束するならばもう一方も収束し和が等しい、片方が発散するならば、もう一方も発散する。ここら辺は細かいので、採点時は問題にしない。)

右辺の ζ についてのベキ級数は、中心 0, 係数 $b_n=\frac{1}{(-3)^n}$ であり、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|b_n|}{|b_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|(-3)^{n+1}|}{|(-3)^n|}=\lim_{n\to\infty}3=3$$

であるから収束半径は 3. ゆえに

$|\zeta|<3$ ならば収束し、$|\zeta|>3$ ならば発散する。

ゆえに与えられた冪級数は

$|(z-1)^3|<3$ ならば収束し、$|(z-1)^3|>3$ ならば発散する。
(言い換えると、$|z-1|<\sqrt[3]{3}$ ならば収束し、$|z-1|>\sqrt[3]{3}$ ならば発散する。)

ゆえに、収束半径は $\sqrt[3]{3}$, 収束円は $D\left(1;\sqrt[3]{3}\right)$. ■

解説は続く。

さらなる解説　冪級数の収束半径について、一番覚えて欲しいことは[1]、実は収束半径の定義である。

収束半径の定義

$$\rho \text{ が } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n \text{ の収束半径} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} |z-c|<\rho \text{ ならば収束かつ } |z-c|>\rho \text{ ならば発散.}$$

時々、収束半径とは、d'Alembert の公式で求まるもののこと、という誤解がある (これを是非とも駆逐したい)。

d'Alembert の公式の使用上の注意

細かいことだと思うかもしれないが、収束半径$=\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ がつねに成り立つわけではないので、

$$\text{収束半径} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \cdots$$

と書き出すのは良くない。

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \cdots = \text{何か}$$

を得てから (極限が求まるか、$=+\infty$ になるかを確認してから)

$$\therefore \quad \text{収束半径} = \text{何か}$$

と書くべきである。

問 (4) はその辺を確認するつもりで出題したが (あまり出来なかった)、こちらが気づかない別解があった (素晴らしい)。

(2) の別解

与えられた冪級数は、初期値 $z-1$, 公比 $\dfrac{(z-1)^3}{-3}$ の等比級数であるから、収束するためには、$\left|\dfrac{(z-1)^3}{-3}\right| < 1$ が成り立つことが必要十分である。これは $|z-1| < \sqrt[3]{3}$ と同値である。ゆえに収束半径は $\sqrt[3]{3}$, 収束円は $D(1;\sqrt[3]{3})$.

念のため「等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ が収束するには、$|r|<1$ が成り立つことが必要十分である。」すなわち

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \text{ が収束} \Leftrightarrow |r|<1.$$

対偶を取ると

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \text{ が発散} \Leftrightarrow |r|\geq 1.$$

(反省: (4) は等比級数では解けない問題にすべきであった。よーしっ…)

[1] もし冪級数について 1 問だけ出して、それで複素関数の合否を決めるならば、どういう問を出すか、と無茶振りされたら、と夢想する。