複合機スキャン用紙　宿題 4　(2019/10/16 出題, 10/23(水) 2 限提出, 裏面使用可)

・学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
・文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score 採点結果			

Student's ID 学生番号											Name 氏名	
Department 所属	Faculty 学部	Department 学科	Subject/Teacher 科目/教員名	/
Class 年・組・番号	Grade 年	Class 組	Number 番	Date 日付	Year 年	Month 月	Day 日

問 4　(1) 以下の各 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ に対して、f の実部・虚部 u, v を求め、それらを偏微分して、Cauchy-Riemann 方程式が成り立つことを確かめよ。

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ $(\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\})$　(b) $f(z) = e^z$ $(z \in \mathbb{C})$　(c) $f(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ $(\Omega = \mathbb{C})$

(2) $f(z) = (\overline{z})^3$ $(z \in \mathbb{C})$ は正則でないことを示せ。

問 4 解説

(1) (a)

$$f(x+yi)=\frac{1}{(x+iy)^2}=\frac{(x-iy)^2}{(x+iy)^2(x-iy)^2}=\frac{x^2-y^2-2ixy}{[(x+iy)(x-iy)]^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2ixy}{(x^2+y^2)^2}$$

であるから

$$u(x,y)=\operatorname{Re} f(x+yi)=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\quad v(x,y)=\operatorname{Im} f(x+yi)=\frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

$$\begin{aligned}
u_x&=\frac{(x^2+y^2)^2\cdot 2x-2(x^2+y^2)\cdot 2x\cdot(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^4}=\frac{2x(x^2+y^2)-4x(x^2-y^2)}{\left(x^2+y^2\right)^3}=\frac{2x(3y^2-x^2)}{\left(x^2+y^2\right)^3},\\
u_y&=\frac{\left(x^2+y^2\right)^2\cdot(-2y)-2(x^2+y^2)\cdot 2y\cdot(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^4}=\frac{-2y(x^2+y^2)-4y\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}=\frac{2y(y^2-3x^2)}{\left(x^2+y^2\right)^3},\\
v_x&=\frac{\left(x^2+y^2\right)^2\cdot(-2y)-2\left(x^2+y^2\right)\cdot(2x)\cdot(-2xy)}{\left(x^2+y^2\right)^4}=\frac{-2y\left(x^2+y^2\right)+8x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^3}=\frac{2y(3x^2-y^2)}{\left(x^2+y^2\right)^3},\\
v_y&=\frac{\left(x^2+y^2\right)^2\cdot(-2x)-2\left(x^2+y^2\right)\cdot 2y\cdot(-2xy)}{\left(x^2+y^2\right)^4}=\frac{-2x(x^2+y^2)+8xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^3}b=\frac{2x(3y^2-x^2)}{\left(x^2+y^2\right)^3}
\end{aligned}$$

であるから、確かに $u_x=v_y,\, u_y=-v_x$ が成り立つ。

(b)

$$f(x+iy)=e^x(\cos y+i\sin y)$$

であるから

$$u(x,y)=\operatorname{Re} f(x+iy)=e^x\cos y,\quad v(x,y)=\operatorname{Im} f(x+iy)=e^x\sin y.$$

ゆえに

$$u_x=e^x\cos y,\quad u_y=-e^x\sin y,\quad v_x=e^x\sin y,\quad v_y=e^x\cos y$$

であるから、確かに $u_x=v_y,\, u_y=-v_x$ が成り立つ。

(c)

$$\begin{aligned}
f\left(x+iy\right)&=\frac{1}{2i}\left(e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}\right)=\frac{-i}{2}\left(e^{-y+ix}-e^{y-ix}\right)\\
&=\frac{-i}{2}\left(e^{-y}\left(\cos x+i\sin x\right)-e^{y}\left(\cos x-i\sin x\right)\right)\\
&=i\frac{e^y-e^{-y}}{2}\cos x+\frac{e^y+e^{-y}}{2}\sin x\\
&=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y
\end{aligned}$$

であるから

$$u(x,y)=\operatorname{Re} f(x+yi)=\sin x\cosh y,\quad v(x,y)=\operatorname{Im} f(x+yi)=\cos x\sinh y.$$

ゆえに

$$u_x=\cos x\cosh y,\quad u_y=\sin x\sinh y,\quad v_x=-\sin x\sinh y,\quad v_y=\cos y\cosh y$$

であるから、確かに $u_x=v_y,\, u_y=-v_x$ が成り立つ。 ■

(2) $f(z) = (\overline{z})^3$ であるから、$x, y \in \mathbb{R}$ とするとき

$$\begin{aligned} f(x+yi) &= (\overline{x+yi})^3 = (x-yi)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot (yi) + 3x(yi)^2 - (yi)^3 = x^3 - 3x^2yi - 3xy^2 + y^3 i \\ &= x^3 - 3xy^2 + (-3x^2y + y^3)i. \end{aligned}$$

ゆえに f の実部・虚部を u, v とすると

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2, \quad v(x,y) = -3x^2y + y^3.$$

これから

$$u_x = 3x^2 - 3y^2, \quad u_y = -6xy, \quad v_x = -6xy, \quad v_y = -3x^2 + 3y^2.$$

もし f が正則ならば、Cauchy-Riemann 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つので

$$x^2 - y^2 = 0, \quad xy = 0.$$

これから $x = y = 0$. すなわち $z = 0$ をのぞいて、Cauchy-Riemann 方程式は成立しない。ゆえに f は $\mathbb{C}$ で正則ではない。(f は 0 では微分可能であるが、それ以外の点では微分可能ではない。) ■

細かい注意　細かいことだけれど、正則というのは、ある開集合 (多くの場合は定義域) 上の任意の点で微分可能であるときに使う言葉である。

孤立特異点の話をしているときに「正則点」という言葉がある。それもその点を含むある開集合上の任意の点で微分可能であるという意味である。

Mathematica で験算

```
f[z_]:=1/z^2
u[x_,y_]:=Simplify[ComplexExpand[Re[f[x+I y]]]]
v[x_,y_]:=Simplify[ComplexExpand[Im[f[x+I y]]]]
{u[x,y],v[x,y]}

Simplify[D[u[x,y],{{x,y}}]]

Simplify[D[v[x,y],{{x,y}}]]

f[z_]:=Exp[z]
u[x_,y_]:=Simplify[ComplexExpand[Re[f[x+I y]]]]
v[x_,y_]:=Simplify[ComplexExpand[Im[f[x+I y]]]]
{u[x,y],v[x,y]}

Simplify[D[u[x,y],{{x,y}}]]

Simplify[D[v[x,y],{{x,y}}]]

f[z_]:=(Exp[I z]-Exp[-I z])/(2I)
u[x_,y_]:=Simplify[ComplexExpand[Re[f[x+I y]]]]
v[x_,y_]:=Simplify[ComplexExpand[Im[f[x+I y]]]]
{u[x,y],v[x,y]}

Simplify[D[u[x,y],{{x,y}}]]

Simplify[D[v[x,y],{{x,y}}]]
```