



・ 学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。  
・ 文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score  
採点結果

|  |  |  |
|--|--|--|
|  |  |  |
|--|--|--|

|                      |               |                  |            |  |             |  |                           |  |           |  |            |          |
|----------------------|---------------|------------------|------------|--|-------------|--|---------------------------|--|-----------|--|------------|----------|
| Student's ID<br>学生番号 |               |                  |            |  |             |  |                           |  |           |  | Name<br>氏名 |          |
| Department<br>所属     | Faculty<br>学部 | Department<br>学科 |            |  |             |  | Subject/Teacher<br>科目/教員名 |  | /         |  |            |          |
| Class<br>年・組・番号      | Grade<br>年    |                  | Class<br>組 |  | Number<br>番 |  | Date<br>日付                |  | Year<br>年 |  | Month<br>月 | Day<br>日 |

問 14    次の定積分の値を求めよ。(1)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^4}$     (2)  $\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + 1} dx$     (3)  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \cos \theta}$

# 問 14 解説

- (1)  $f(z) := \frac{z^2}{(z^2 + 1)^4}$ ,  $P(z) := (z^2 + 1)^4$ ,  $Q(z) := 1$  とおくと  $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$  かつ  $\deg P(z) = 8 \geq 2 = \deg Q(z) + 2$ ,  $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$ . さらに任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して  $P(x) = (x^2 + 1)^4 \geq (0 + 1)^4 = 1$  であるから  $P(x) \neq 0$ . ゆえに授業で説明した定理が使えて

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^4} = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res}(f; c).$$

$P, Q$  ともに  $\mathbb{C}$  全体で正則である。 $P(z) = (z + i)^4(z - i)^4$  であるから、 $P$  の零点は  $c = \pm i$  であり、ともに位数は 4.  $Q(\pm i) = 1 \neq 0$  であるから、これらは  $f(z) = \frac{1}{(z + i)^4(z - i)^4}$  の 4 位の極である。このうち  $\operatorname{Im} c > 0$  であるものは  $c = i$ . ゆえに

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i \operatorname{Res}(f; i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{(4-1)!} \lim_{z \rightarrow i} \left( \frac{d}{dz} \right)^{4-1} \left[ (z - i)^4 \cdot \frac{1}{(z - i)^4(z + i)^4} \right] = \frac{2\pi i}{3!} \lim_{z \rightarrow i} ((z + i)^{-4})''' \\ &= \frac{2\pi i}{6} \cdot (-4)(-5)(-6) (z + i)^{-7} \Big|_{z=i} = -2 \cdot 4 \cdot 5\pi i \cdot \frac{1}{(2i)^7} = \frac{5\pi}{2^4} = \frac{5\pi}{16}. \end{aligned}$$

- (2) 被積分関数は偶関数であること、 $x \in \mathbb{R}$  のとき  $\frac{x \sin x}{x^4 + 1} = \operatorname{Im} \frac{x e^{ix}}{x^4 + 1}$  であることから、

$$I := \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^4 + 1} dx.$$

$P(z) := z^4 + 1$ ,  $Q(z) := z$  とおくと、 $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ ,  $\deg P(z) = 4 \geq 2 = \deg Q(z) + 1$ ,  $\frac{x e^{ix}}{x^4 + 1} = \frac{Q(x)}{P(x)} e^{ix}$ . さらに任意の  $x \in \mathbb{R}$  に対して、 $P(x) = (x^4 + 1) \geq 0 + 1 = 1$  であるから  $P(x) \neq 0$ . ゆえに授業で説明した定理が使えて

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^4 + 1} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} c > 0} \operatorname{Res} \left( \frac{z e^{iz}}{z^4 + 1}; c \right).$$

$P, Q, e^{iz}$  は  $\mathbb{C}$  全体で正則である。 $P$  の零点は  $z^4 = -1$  の解であるから、

$$z = e^{i\pi/4}, e^{i3\pi/4}, e^{i5\pi/4}, e^{i7\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

どれも位数は 1. このとき分子は 0 ではないので、いずれも被積分関数の 1 位の極であり、これら以外に特異点は存在しない。このうち  $\operatorname{Im} c > 0$  であるものは  $c_1 := e^{i\pi/4}$ ,  $c_2 := e^{i3\pi/4}$ .

$$\operatorname{Res} \left( \frac{z e^{iz}}{z^4 + 1}; c_j \right) = \frac{z e^{iz}}{(z^4 + 1)'} \Big|_{z=c_j} = \frac{z e^{iz}}{4z^3} \Big|_{z=c_j} = \frac{c_j^2 e^{ic_j}}{4 \cdot c_j^4} = -\frac{c_j^2 e^{ic_j}}{4}.$$

$j = 1$  のとき  $c_j^2 = e^{i\pi/2} = i$  であるから

$$\operatorname{Res} \left( \frac{z e^{iz}}{z^4 + 1}; c_j \right) = \frac{-i}{4} e^{i(1+i)/\sqrt{2}} = \frac{1}{4} e^{-\sqrt{2}} \left( \sin \frac{1}{\sqrt{2}} - i \cos \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

$j = 2$  のとき  $c_j^2 = e^{i3\pi/2} = -i$  であるから

$$\operatorname{Res} \left( \frac{z e^{iz}}{z^4 + 1}; c_j \right) = \frac{i}{4} e^{i(-1+i)/\sqrt{2}} = \frac{1}{4} e^{-\sqrt{2}} \left( \sin \frac{1}{\sqrt{2}} + i \cos \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^4+1} dx = 2\pi i \left( \operatorname{Res} \left( \frac{ze^{iz}}{z^4+1}; c_1 \right) + \operatorname{Res} \left( \frac{ze^{iz}}{z^4+1}; c_2 \right) \right) = 2\pi i \cdot \frac{1}{4} e^{-\sqrt{2}} \cdot 2 \sin \frac{1}{\sqrt{2}} = \pi i e^{-\sqrt{2}} \sin \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ゆえに  $I = \frac{\pi}{2} e^{-\sqrt{2}} \sin \frac{1}{\sqrt{2}}.$

- (3) (参考のために解答を書きますが、この問題は前回説明せず、宿題にもしなかったもので、類題を期末試験に出題することはありません。)

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \cos \theta}$$

$z = e^{i\theta}$  ( $\theta \in [0, 2\pi]$ ) とおくと、 $dz = ie^{i\theta} d\theta$  であるから  $d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}$ . また

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + 1/z}{2}$$

であるから

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{3 + \frac{1}{2}(z + 1/z)} \cdot \frac{dz}{iz} = -2i \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 6z + 1}.$$

留数定理によって

$$I = -2i \cdot 2\pi i \sum_{|c|<1} \operatorname{Res} \left( \frac{1}{z^2 + 6z + 1}; c \right).$$

$c^2 + 6c + 1 = 0$  の解  $c = -3 \pm 2\sqrt{2}$  のうち、 $-3 + 2\sqrt{2}$  だけが  $|c| < 1$  の範囲にある。

$$I = 4\pi \operatorname{Res} \left( \frac{1}{z^2 + 6z + 1}; 2\sqrt{2} - 3 \right) = 4\pi \left. \frac{1}{2z + 6} \right|_{z=-3+2\sqrt{2}} = 4\pi \cdot \frac{1}{-6 + 4\sqrt{2} + 6} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \blacksquare$$