複合機スキャン用紙　宿題 13　(2020/1/8 出題, 1/14(火) 3 限提出, 裏面使用可)

・学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
・文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score 採点結果			

Student's ID 学生番号											Name 氏名	
Department 所属	Faculty 学部	Department 学科					Subject/Teacher 科目/教員名	/				
Class 年・組・番号	Grade 年	Class 組	Number 番				Date 日付	Year 年	Month 月	Day 日		

問 13　(1) $f(z) = \dfrac{z-1}{(z-2)(z-3)^4}$ とするとき、$\mathrm{Res}(f;1)$, $\mathrm{Res}(f;2)$, $\mathrm{Res}(f;3)$ を求めよ。

(2) 次の関数の極とその位数、その点における留数を求めよ。$g(z) = \tan z$　(b) $h(z) = (\tan z)^2$

((b) はちょっと難しい)

「問題の解法パターンを覚えて」という言葉があるけれど、関数論は、問題がどういうパターンであるかを判定するのが、高校数学や微分積分などと比べて難しめかもしれない。

零点、極、位数などの言葉の意味が分かることは必要条件である。それが分かれば、どの定理 (公式) を使うかは割と単純な話である。

言葉の意味が分かることは、初めて学ぶ人にとって「簡単にできること」と言うつもりはない。大変だよね (一応、新しいことを学ぶことはずっと続けているので、分かるつもり。最近は物覚えが悪くてしんどい…)。思い出せなければ復習する、とにかく定義を反芻して、その言葉を使う例を見て意味が取れるか確認して、自分でも使ってみて、合っているかチェックしてもらう。意識的な努力が必要である。

使いそうなこと (定義は当然のこととして除く) のまとめ

定理 A 「c が f の k 位の極 $\Leftrightarrow$ c のある近傍 U と、U で正則な g が存在して、$f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-c)^k}$ $(z\in U\setminus\{c\})$, $g(c)\neq 0$ が成り立つ。」

定理 B 「c が f の k 位の零点 $\Leftrightarrow$ c のある近傍 U と、U で正則な g が存在して、$f(z)=(z-c)^k g(z)$ $(z\in U)$, $g(c)\neq 0$ が成り立つ。」

定理 C 「P と Q が c のある近傍 U で正則であり、c が P の k 位の零点で、$Q(c)\neq 0$ であれば、c は $f:=\dfrac{Q}{P}$ の k 位の極である。」

条件 $Q(c)\neq 0$ を省くと、結論は「c は $f:=\dfrac{Q}{P}$ の**高々** k 位の極である。」となる。

定理 D 「c が f の正則点 (f が c のある近傍で正則であること) または f の除去可能特異点であれば $\mathrm{Res}(f;c)=0$.」

定理 E 「c が f の高々 k 位の極ならば $\mathrm{Res}(f;c)=\dfrac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to c}\left(\dfrac{d}{dz}\right)^{k-1}\left[(z-c)^k f(z)\right]$.」

定理 F 「P と Q が c のある近傍で正則で、c が P の 1 位の零点ならば、(c は $f:=\dfrac{Q}{P}$ の高々 1 位の極であり) $\mathrm{Res}(f;c)=\dfrac{Q(c)}{P'(c)}$.」

定理 G 「c が φ の 1 位の極、ψ が c のある近傍で正則ならば、c は $f:=\varphi\psi$ の高々 1 位の極で、$\mathrm{Res}(f;c)=\mathrm{Res}(\varphi;c)\psi(c)$.」

問 13 解説

(1) $f(z)=\dfrac{z-1}{(z-2)(z-3)^4}$ は $\mathbb{C}\setminus\{2,3\}$ で正則である。

- 1 の近傍 $D(1;1)$ で f は正則であるから、$\mathrm{Res}(f;1)=0$.
- $g(z):=\dfrac{z-1}{(z-3)^4}$ は 2 の近傍 $D(2;1)$ で正則であり、$g(2)=\dfrac{2-1}{(2-3)^4}=1\neq 0$,

$$f(z)=\frac{g(z)}{z-2}\quad (z\in D(2;1)).$$

ゆえに 2 は f の 1 位の極である。

$$\mathrm{Res}(f;2)=\lim_{z\to 2}(z-2)f(z)=\lim_{z\to 2}g(z)=g(2)=1.$$

- $h(z) := \dfrac{z-1}{z-2}$ は 3 の近傍 $D(3;1)$ で正則であり、$h(3) = \dfrac{2}{1} = 2 \neq 0$,

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-3)^4} \quad (z \in D(3;1)).$$

ゆえに 3 は f の 4 位の極である。

$$\mathrm{Res}(f;3) = \frac{1}{(4-1)!}\lim_{z\to 3}\left(\frac{d}{dz}\right)^{4-1}\left[(z-3)^4 f(z)\right] = \frac{1}{3!}\lim_{z\to 3}\left(\frac{z-1}{z-2}\right)'''.$$

ここで

$$\left(\frac{z-1}{z-2}\right)''' = \left(\frac{(z-2)\cdot 1 - 1\cdot(z-1)}{(z-2)^2}\right)'' = \left(-(z-2)^{-2}\right)'' = \frac{-6}{(z-2)^4}.$$

ゆえに

$$\mathrm{Res}(f;3) = \frac{1}{6}\lim_{z\to 3}\frac{-6}{(z-2)^4} = -1.$$

(2) (a) $p(z) := \cos z$, $q(z) := \sin z$ とおくと、p と q は $\mathbb{C}$ 全体で正則で、p の零点は $c_n := (n+1/2)\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ であり、

$$p'(c_n) = -\sin c_n = -(-1)^n \neq 0, \quad q(c_n) = \sin c_n = (-1)^n \neq 0.$$

以上から、$g = \frac{q}{p}$ は $\mathbb{C} \setminus \{c_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ で正則であり、c_n は f の 1 位の極である。

$$\mathrm{Res}(f;c_n) = \frac{q(c_n)}{p'(c_n)} = \frac{\sin c_n}{-\sin c_n} = -1.$$

(b) $c_n = (n+1/2)\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ とする。h は $\mathbb{C} \setminus \{c_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ で正則で、c_n は h の 2 位の極である。実は留数 $\mathrm{Res}(h;c_n) = 0$.

以下 余談

(この問題自体に大して重要性はないと思うけれど、色々なことの説明が出来る。)
$\mathrm{Res}(h;c_n) = 0$ となることは、学生の答案例 (表現は少し直します) なども取り混ぜて説明してみる。
まず、学生の答案の中から、こちらが想定していた方法のうちの 1 つ (良く分かったな…)。

解答例 1　平行移動して原点で考える。h は周期 π であり、$\cos(z+\pi/2) = -\sin z$, $\sin(z+\pi/2) = \cos z$ であるから

$$\mathrm{Res}(h;n\pi+\pi/2) = \mathrm{Res}\left(h;\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{Res}\left(h\left(z+\frac{\pi}{2}\right);0\right) = \mathrm{Res}\left(\frac{\sin^2(z+\pi/2)}{\cos^2(z+\pi/2)};0\right) = \mathrm{Res}\left(\frac{\cos^2 z}{\sin^2 z};0\right).$$

$\dfrac{\cos^2 z}{\sin^2 z}$ は偶関数であるから、0 における Laurent 展開は偶数次の項しかない (奇数次の項の係数 $a_{2k-1} = 0$)。よって

$$\mathrm{Res}(h;c_n) = a_{-1} = 0. \blacksquare$$

これは説明が短かすぎるかもしれないので、センセーが補足する。

平行移動と留数

f が $0 < |z-c| < \varepsilon$ で正則であるとするとき、

$$\mathrm{Res}(f;c) = \mathrm{Res}(f(z+a);c-a). \tag{1}$$

証明 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-c)^n$ $(0<|z-c|<\varepsilon)$ ならば、

$$f(z+a)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z+a-c)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-(c-a))^n \quad (0<|z-(c-a)|<\varepsilon)$$

であるから、$\operatorname{Res}(f(z+a);c-a)=a_{-1}=\operatorname{Res}(f;c)$. ■

(特に f が周期 T の周期関数ならば、$\operatorname{Res}(f;c+nT)=\operatorname{Res}(f;c)$ $(n\in\mathbb{Z})$. 例えば tan の周期性から $\operatorname{Res}(\tan;(n+1/2)\pi)=\operatorname{Res}(\tan;\pi/2)$. これを使わなくても解けるが、使うと見通しが良い。)

関数の偶奇性と Laurent 展開の係数 (これは Taylor 展開でも同様)

f が $0<|z|<\varepsilon$ で正則とするとき、$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ $(0<|z|<\varepsilon)$ と冪級数展開できるが、

- f が奇関数であれば、$a_{2k}=0$. すなわち Laurent 展開は奇数次の項だけからなる。
- f が偶関数であれば、$a_{2k+1}=0$. すなわち Laurent 展開は偶数次の項だけからなる。特に偶関数の留数は 0 である。

証明 奇関数の場合のみ証明する。

$$f(z)=-f(-z)=-\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(-z)^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(-1)^{n+1}z^n \quad (|z|<\varepsilon)$$

という Laurent 展開が得られる。展開の一意性から、任意の $n\in\mathbb{Z}$ について $a_n=(-1)^{n+1}a_n$. n が偶数のとき $a_n=-a_n$ であるから $a_n=0$. ■

(ついでに) 普通、奇関数、偶関数は 0 について対称な点を考えているが、点 c について奇関数、偶関数ということを

- f が c について奇関数 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\forall x \quad f(c-x)=-f(c+x)$
- f が c について偶関数 $\overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ $\forall x \quad f(c-x)=f(c+x)$

で定義すると、

f が $0<|z-c|<\varepsilon$ で正則であり、c について偶関数であれば、$\operatorname{Res}(f;c)=0$

が証明できる。

次も学生の答案だけれど、こういうやり方は気づかなかった (良くこういう答を思いついたな…)。ある意味で (平行移動も、奇関数・偶関数も使わないで済むので) 一番簡単かもしれない。

解答例 2 任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対して、(1-a) の結果 (c_n は tan の 1 位の極であり、$\operatorname{Res}(\tan;c_n)=-1$) から、ある $\{a_n\}$ が存在して

$$\tan z=\frac{-1}{z-c_n}+\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c_n)^n \quad (0<|z-c_n|<\pi/2).$$

ところで

$$h(z)=(\tan z)^2=\frac{\sin^2 z}{\cos^2 z}=\frac{1-\cos^2 z}{\cos^2 z}=\frac{1}{\cos^2 z}-1$$

であり

$$(\tan z)' = \frac{1}{\cos^2 z}$$

であるから

$$\begin{aligned} h(z) = (\tan z)^2 = (\tan z)' - 1 &= \frac{1}{(z-c_n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-c_n)^{n-1} - 1 \\ &= \frac{1}{(z-c_n)^2} + (a_1 - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z - c_{n+1})^n. \end{aligned}$$

ゆえに

$$\operatorname{Res}(h; c_n) = 0. \blacksquare$$

Mathematica を使えば、$\tan'$ と $\tan^2$ の Laurent 展開を見比べてみることもできる。

```
Series[Tan[z],{z,Pi/2,10}]
Series[Tan[z]^2,{z,Pi/2,10}]
Series[D[Tan[z],z],{z,Pi/2,10}]
```

私 (桂田) は、解答例 1 の方法以外に次のようなことを考えていた。

解答例 3 (1-a) より、任意の $j \in \mathbb{Z}$ に対して ある $\{a_n\}$ が存在して

$$\tan z = \frac{-1}{z-c_j} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c_j)^n \quad (0 < |z-c_j| < \pi/2).$$

両辺を 2 乗して

$$\begin{aligned} h(z) = (\tan z)^2 &= \left(-\frac{1}{z-c_j} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c_j)^n\right)\left(-\frac{1}{z-c_j} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c_j)^n\right) \\ &= \frac{1}{(z-c_j)^2} - \frac{2a_0}{z-c_j} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-c_j)^2 \quad (0 < |z-c_j| < \pi/2). \end{aligned}$$

(b_n は a_n を使って表せるが、そうする必要はない。)

ゆえに

$$\operatorname{Res}(h; c_j) = -2a_0.$$

実は $a_0 = 0$ である (後で紹介するように計算して求めることもできるし、tan は c_j について奇関数だから、としても分かる)。ゆえに $\operatorname{Res}(h; c_j) = 0$. ■

この答案は突き詰めると、「tan は c_j について奇関数なので、Laurent 展開には、奇数次の項しかない。ゆえにその 2 乗である h の Laurent 展開には偶数次の項しかない。ゆえに $\operatorname{Res}(h; c_j) = 0$.」という短い解答になる。

平行移動して原点まで持ってくれば、計算もしやすくなる (これは結構大事なテクニックだ)。

解答例 4 $\tan^2$ は周期 π の周期関数であるから

$$\operatorname{Res}\left(\tan^2; (n+1/2)\pi\right) = \operatorname{Res}\left(\tan^2; \pi/2\right).$$

平行移動して

$$\operatorname{Res}\left(\tan^2; \pi/2\right) = \operatorname{Res}\left(\tan^2(z+\pi/2); 0\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{\cos^2 z}{\sin^2 z}; 0\right).$$

ここまでは解答例 1 と同じである。こうすると簡単になって、以下のように計算を進めることが出来る。

2 位の極であるから

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\cos^2 z}{\sin^2 z};0\right)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(z^2\cdot\frac{\cos^2 z}{\sin^2 z}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{z\cos z\,(\sin 2z-2z)}{\sin^3 z}$$

$\sin 2z-2z$ について、Taylor 展開を用いて

$$\sin(2z)-2z=\left(2z-\frac{(2z)^3}{3!}+\frac{(2z)^5}{5!}-\cdots\right)-2z=O(z^3)\quad(z\to 0).$$

あるいは ($\sin 2z$ とまとめることに気づかず) $\sin(2z)-2z$ のところを $2(\sin z\cos z-z)$ としてあっても、

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\cdots,\quad \cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\cdots$$

であるから

$$\sin z\cos z-z=\left(z+O(z^3)\right)\left(1+O(z^2)\right)-z=\left(z+O(z^3)\right)-z=O(z^3)\quad(z\to 0).$$

ゆえに

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\cos^2 z}{\sin^2 z};0\right)=\lim_{z\to 0}\left(2\cos z\cdot\frac{z}{\sin z}\cdot\frac{O(z^3)}{\sin^2 z}\right)=2\cdot 1\cdot 1\cdot 0=0.$$

あるいは $\dfrac{\cos^2 z}{\sin^2 z}$ の Laurent 展開を何項か計算する、という方針で

$$\frac{\cos^2 z}{\sin^2 z}=\frac{\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\right)^2}{\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)^2}=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\right)^2}{\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots\right)^2}.$$

右辺の第 2 因子は、0 の近傍 $D(0;\pi)$ で正則であるから、ある $\{b_n\}_{n\ge 0}$ が存在して

$$\frac{\left(1-\frac{w}{2!}+\frac{w^2}{4!}-\cdots\right)^2}{\left(1-\frac{w}{3!}+\frac{w^2}{5!}-\cdots\right)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n w^n\quad(z\in D(0;\pi)).$$

ゆえに

$$\frac{\cos^2 z}{\sin^2 z}=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n\left(z^2\right)^n=\frac{b_0}{z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^{2(n-1)}=\frac{b_0}{z^2}+\sum_{n=0}^{\infty}b_{n+1}z^{2n}\quad(z\in D(0;\pi)).$$

これから (未定係数法で b_n を必要なだけを求めることが出来るけれど、それをしなくても -1 次の項 ($\dfrac{a_{-1}}{z}$ という形の項) はないことが分かるので)

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\cos^2 z}{\sin^2 z};0\right)=0.\blacksquare$$

余談　解答例 4 の後半のやり方で (2-a) を解いてみよう。

tan の周期性を使うと、

$$\operatorname{Res}\left(\tan;(n+1/2)\pi\right)=\operatorname{Res}\left(\tan;\pi/2\right).$$

平行移動して

$$\operatorname{Res}\left(\tan;(n+1/2)\pi\right)=\operatorname{Res}\left(\tan(z+\pi/2);0\right)=\operatorname{Res}\left(-\frac{\cos z}{\sin z};0\right).$$

$-\dfrac{\cos z}{\sin z}$ の Laurent 展開を求めよう。

$$-\frac{\cos z}{\sin z}=\frac{1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots}{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots}{1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots}$$

$$g(w):=\frac{1-\frac{w}{2!}+\frac{w^2}{4!}-\cdots}{1-\frac{w}{3!}+\frac{w^2}{5!}-\cdots}$$

を考える。分母が 0 で 0 にならないので、g は 0 の近傍 (実は $D(0;\pi)$) で正則である。ゆえに

$$(\exists\{a_n\}_{n\ge 0})\quad \frac{1-\frac{w}{2!}+\frac{w^2}{4!}-\cdots}{1-\frac{w}{3!}+\frac{w^2}{5!}-\cdots}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nw^n\quad (z\in D(0;\pi)).$$

分母を払って

$$\begin{aligned}1-\frac{w}{2!}+\frac{w^2}{4!}-\cdots&=\left(1-\frac{w}{3!}+\frac{w^2}{5!}-\cdots\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nw^n.\right)\\&=a_0+\left(a_1-\frac{1}{3!}a_0\right)w+\left(a_2-\frac{1}{3!}a_1+\frac{1}{5!}a_0\right)w^2+\cdot\end{aligned}$$

係数を比較して

$$a_0=1,\quad a_1-\frac{1}{6}=-\frac{1}{2},\quad a_2-\frac{1}{6}a_1+\frac{a_0}{120}=\frac{1}{24},$$

これから

$$a_0=1,\quad a_1=-\frac{1}{3},\quad a_2=-\frac{1}{45},\quad\cdots$$

ゆえに

$$-\frac{\cos z}{\sin z}=-\frac{1}{z}\left(1-\frac{z^2}{3}-\frac{z^4}{45}+\cdots\right)=\frac{-1}{z}+\frac{z}{3}+\frac{z^3}{45}+\cdots$$

ゆえに

$$\operatorname{Res}\left(\tan z;(n+1/2)\pi\right)=\operatorname{Res}\left(-\frac{\cos z}{\sin z};0\right)=-1.\blacksquare$$