複合機スキャン用紙　宿題 12　(2019/12/18 出題, 12/24(火) 3 限提出, 裏面使用可)

・学生番号は機械で読み取りますので、きれいにご記入ください。
・文字がくずれている場合、かすれている場合、枠からはみ出している場合には、学生番号は正しく読み取りできません。

Score 採点結果			

Student's ID 学生番号											Name 氏名	
Department 所属	Faculty 学部	Department 学科	Subject/Teacher 科目/教員名	/
Class 年・組・番号	Grade 年	Class 組	Number 番	Date 日付	Year 年	Month 月	Day 日

問 12　$f(z)=\dfrac{z^3-7z^2+26z-30}{z^3-5z^2+3z+9}$ について、以下の問に答えよ ($f(z)$ の部分分数分解の結果は、Mathematica で `Apart[(z^3-7z^2+26z-30)/(z^3-5z^2+3z+9)]` として検算することを勧める)。

(1) 3 のまわりの f の Laurent 展開とその収束範囲 (どの円環領域で収束するか？)、主部、留数を求めよ。

(2) 円環領域 $A(3;4,+\infty)$ における f の Laurent 展開を求めよ。

(3) f の極を全て求め、その位数を答えよ (もちろん全て Laurent 展開を求めれば分かるが、サボることも可能である — なるべくサボろう)。

問 12 解説

(1)

$$f(z)=\frac{z^3-7z^2+26z-30}{z^3-5z^2+3z+9}=1+\frac{-2z^2+23z-39}{(z+1)(z-3)^2}=1+\frac{A}{z-3}+\frac{B}{(z-3)^2}+\frac{C}{z+1}\quad (A,\ B,\ C)\ \text{は定数}$$

を満たす A, B, C が存在するはず。分母を払って

$$A(z-3)(z+1)+B(z+1)+C(z-3)^2=-2z^2+23z-39.$$

これは恒等式である。

- $z=-1$ を代入して $16C=-64$ より $C=-4$.
- $z=3$ を代入して $4B=12$ より $B=3$.
- 最高次の係数を比較して $A+C=-2$ から $A=-2-C=2$ (あるいは、$z=0$ を代入して $-3A+B+9C=-39$ から $A=\dfrac{B+9C+39}{3}=1-12+13=2$. あるいは微分して $z=3$ を代入して $4A=8$ より $A=2$).

(展開して 3 元連立 1 次方程式を解く人が少なくないのだけれど…まあ、解く人の勝手と言えば、勝手だけれど。) ゆえに

$$f(z)=1+\frac{2}{z-3}+\frac{3}{(z-3)^2}-\frac{4}{z+1}.$$

$-\dfrac{4}{z+1}$ の 3 の周りの冪級数展開を求める。

$$-\frac{4}{1+z}=-\frac{4}{4+(z-3)}=-\frac{1}{1-\left(-\frac{z-3}{4}\right)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-3}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4^n}(z-3)^n.$$

この冪級数が収束 $\Leftrightarrow$ | 公比 | $<1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z-3}{4}\right|<1 \Leftrightarrow |z-3|<4$. ゆえに

$$\begin{aligned}f(z)&=1+\frac{2}{z-3}+\frac{3}{(z-3)^2}-\frac{4}{z+1}=1+\frac{2}{z-3}+\frac{3}{(z-3)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4^n}(z-3)^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4^n}(z-3)^n+\frac{2}{z-3}+\frac{3}{(z-3)^2}\quad (0<|z-3|<4).\end{aligned}$$

これが f の 3 のまわりの Laurent 展開である。$A(3;0,4)$ で収束する。主部は $\dfrac{2}{z-3}+\dfrac{3}{(z-3)^2}$. 留数 $\mathrm{Res}(f;3)=2$.

検算

```
Together[Sum[(-1)^(n-1)/4^n(z-3)^n, {n,1,Infinity}]+2/(z-3)+3/(z-3)^2]
```

(2)

$$\begin{aligned}-\frac{4}{z+1}&=-\frac{4}{4+(z-3)}=-\frac{4}{z-3}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{z-3}}=-\frac{4}{z-3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{z-3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^{n+1}}{(z-3)^{n+1}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{(z-3)^n}\end{aligned}$$

について、収束 $\Leftrightarrow$ | 公比 | $<1 \Leftrightarrow \left|-\dfrac{4}{z-3}\right|<1 \Leftrightarrow 4<|z-3|$.

ゆえに

$$\begin{aligned}f(z)&=1+\frac{2}{z-3}+\frac{3}{(z-3)^2}-\frac{4}{z+1}=1+\frac{2}{z-3}+\frac{3}{(z-3)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{(z-3)^n}\\&=1-\frac{2}{z-3}+\frac{19}{(z-3)^2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-4)^n}{(z-3)^n}\quad (z\in A(3;4,+\infty)).\end{aligned}$$

これが $A(3;4,+\infty)$ における f の Laurent 展開である。

検算

```
Together[1-2/(z-3)+19/(z-3)^2+Sum[(-4)^n/(z-3)^n, {n,3,Infinity}]]
```

(3) f の極は -1 と 3. 位数はそれぞれ 1, 2 である。

3 については、(1) で Laurent 展開を求めたので、それから分かる。

-1 の周りの Laurent 展開について。

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z),\quad f_1(z):=1+\frac{2}{z-3}+\frac{3}{(z-3)^2},\quad f_2(z):=-\frac{4}{z+1}$$

と分解する。f_1 は $D(-1;4)$ で正則であるから、-1 の周りに冪級数展開できる: $(\exists\{a_n\}_{n\geq 0})$ $f_1(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z+1)^n$ $(z\in D(-1;4))$. ゆえに

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z+1)^n+\frac{-4}{z+1}\quad (z\in A(-1;0,4))$$

が成り立つが、これは f の -1 の周りの Laurent 展開である。主部は $\dfrac{-4}{z+1}$ であるから、-1 は f の極で、その位数は 1. ($\{a_n\}$ を具体的に求める必要がないことに注意。)■

- 部分分数分解をするとき、授業では連立 1 次方程式を解いたことはないのだけど、それをしている人が多いのはなぜだろう。
- 無限級数を書いたら必ず収束条件を調べること。収束しない冪級数はほとんど無意味で、収束することの確認は重要である。その点をいい加減にやっている人が多い。実質的に等比級数しか出て来ないので、簡単なはずだけど。
- 途中経過の省略の仕方がまずい人がいる。説得力がないということは別にして、計算ミスした場合に部分点もつけにくい。

有理式の因数分解について、授業中に簡単に説明したが、講義ノートの付録 **G** に書いておいた (2020/1/5)。